AULA 9

LPL 15: Teoria dos Conjuntos de Primeira Ordem

Introdução

- A Teoria de Conjuntos, que vem sendo desenvolvida nos últimos 100 anos, representa uma estrutura de suporte útil para descrever muitas outras teorias matemáticas.
- Representa também uma ferramenta para modelagem abstrata de uma ampla variedade de estruturas fora da matemática (na ciência da computação, lingüística, economia, filosofia, e até na lógica, entre outras áreas)
- No capítulo 18, por exemplo, usaremos a Teoria dos Conjuntos para fazer definições rigorosas de nossas já familiares noções de conseqüência de primeira-ordem e validade de primeira-ordem.

Lógica e Teoria dos Conjuntos

- Neste capítulo, no entanto, trataremos a relação da lógica com a Teoria dos Conjuntos pelo outro lado. A Teoria dos Conjuntos é geralmente apresentada como uma Teoria Axiomática em uma Linguagem de Primeira-Ordem.
    - Descreveremos quais os **predicados** e **constantes individuais** que farão parte da linguagem desta teoria.
    - Expressaremos os princípios (**axiomas**) da Teoria dos Conjuntos em **FOL**, com estes predicados e constantes.
    - Estudaremos as **conseqüências lógicas** destes princípios e faremos **provas informais** delas, utilizando, para isto, os métodos de prova que aprendemos ao longo do livro e que representam as regras do sistema F.
    - Deste modo, escreveremos todas as proposições da Teoria dos Conjuntos em FOL. A Teoria dos Conjuntos assim desenvolvida é conhecida como **Teoria dos Conjuntos de Priemeira Ordem** (por razões óbvias).
    - O que **não faremos**, a não ser em alguns casos mais simples, são **provas formais**. Pelo simples motivo que elas tendem a ser **MUITO** longas, com centenas ou milhares de passos. Portanto apresentaremos versões informais destas provas.

Teoria dos Conjuntos Ingênua

- Veremos um pouco do desenvolvimento histórico da Teoria dos Conjuntos, que iniciou-se com uma noção de conjunto que hoje é conhecida como **ingênua**.
- Esta noção ingênua tem dois princípios básicos: O **Axioma da Extensionalidade** e o **Axioma da Compreensão**.
- Apresentaremos estes axiomas na linguagem de primeira ordem da Teoria dos Conjuntos e estudaremos algumas de suas conseqüências lógicas.
- Logo veremos que estes dois axiomas, conforme a noção ingênua de conjunto, são inconsistentes. Provaremos uma contradição a partir deles.

- Isso significa que não pode haver um domínio de discurso que satisfaça ambos estes axiomas.

O Paradoxo de Russell

- A inconsistência mencionada acima, veremos, é nada menos que o Paradoxo de Russell.
- O objetivo de muito do trabalho pioneiro na Teoria dos Conjuntos foi redefinir a concepção de conjunto de uma forma que evitasse inconsistências, mas que mantivesse o poder da noção intuitiva (ingênua).
- O capítulo será finalizado com a apresentação dos axiomas revisados e corrigidos, que evitam o Paradoxo de Russell e que é conhecida como **Teoria dos Conjuntos Zermelo-Frankel**, ou ZFC.
- Os matemáticos acreditam (embora ainda não tenham provado) que a Teoria dos Conjuntos é, não apenas consistente (não deriva contradições), mas verdadeira (sobre um suposto domínio "natural" de conjuntos).

15.1 TEORIA DOS CONJUNOS INGÊNUA

- Quem primeiro se aventurou no estudo dos conjuntos foi o matemático alemão do século XIX Georg Cantor.
- **CONJUNTO** (concepção ingênua): um conjunto é uma coleção de coisas.
    - conjunto de cadeiras
    - conjunto de dominós
    - conjunto de números

- **MEMBROS DE UM CONJUNTO**: as coisas na coleção (no conjunto) são os ***membros*** ou ***elementos***.
    - **a** $\in$ **b** - "a pertence a b" - quando a é um dos objetos fazem parte de b.
    - '$\in$' é um símbolo de predicado binário escrito na notação infixa. Como '='.
    - Aliás, os únicos predicados da Teoria dos Conjuntos são $\in$ e =.

- **DESCRIÇÃO EM LISTA**: se podemos listar todos os objetos de um conjunto ***b***, digamos os números 7, 8 e 10, então a descrição em lista deste conjunto é:
    - ***b*** = {7, 8, 10}

- **CONJUNTOS E NÃO-CONJUNTOS**: usaremos dois "tipos" de variáveis em nossa Teoria dos Conjuntos de Primeira ordem.
    - Um tipo tem como domínio todos e apenas os conjuntos.
    - O outro tipo varia sobre conjuntos e outros objetos do domínio do discurso.

- Este tipo de distinção de **tipos distintos** de variáveis produz linguagens de primeira-ordem conhecidas como **linguagens multissortidas.**
- Ao invés de uma linguagem multissortida, poderíamos utilizar um predicado unário **Set(x)** para indicar que x é um conjunto.

- **<u>OS DOIS TIPOS DE VARIÁVEIS</u>**:
  - Usaremos as letras **a, b, c, ...,** com ou sem subscritos, como variáveis sobre conjuntos.
  - Usaremos as letras **x, y, z, ...,** com ou sem subscritos, como variáveis gerais, sobre quaisquer coisas (tanto objetos ordinários quanto conjuntos).
  - Exemplo: "*Qualquer coisa é membro de algum conjunto*":
    - $\forall x \, \exists a \, (x \in a)$

- **<u>OUTROS SÍMBOLOS COMUNS</u>**:
- Há outros símbolos que serão bastante utilizados nesta teoria:
  - $\varnothing$ - constante individual que denota o conjunto vazio.
  - $\subseteq$ - expressa a relação de **subconjunto** (símbolo não-primitivo, ou seja, definido).
  - $\cap$ - expressa a função **interseção** (símbolo não-primitivo).
  - $\cup$ - expressa a função **união** (símbolo não-primitivo).
  - Letras maiúsculas como **D** e **R** serão usadas como variáveis sobre certos tipos especiais de conjuntos que veremos mais adiante.

<u>O Axioma da Extensionalidade</u>

- Conforme já dissemos, o axioma da extensionalidade é um dois princípios básicos capturam a concepção ingênua de conjuntos.
- **<u>VERSÃO INFORMAL</u>**: os conjuntos são completamente caracterizados por seus elementos.
- **<u>VERSÃO PRECISA</u>**: se os conjuntos **a** e **b** têm exatamente os mesmos elementos, então **a = b**.
- **<u>EM FOL</u>**: $\forall a \, \forall b \, [\forall x \, (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b]$
- Em particular, a <u>identidade</u> de um conjunto não depende de como ele é descrito.
- Por exemplo, o conjunto contendo apenas os números 7 e 11 pode ser descrito de várias maneiras:
  - {7, 11}
  - {11, 7}
  - 'O conjunto dos números primos entre 6 e 12'.

- ‘O conjunto das soluções da equação $x^2 - 18x + 77 = 0$’.
- ‘Os números favoritos da Elaine’.

- Todas estas descrições representam o MESMO CONJUNTO. São apenas modos diferentes de nos referirmos ao mesmo conjunto.

- **CONJUNTOS x PROPRIEDADES**: se estivéssemos desenvolvendo uma Teoria das Propriedades, ao invés de uma Teoria dos Conjuntos, então não deveríamos tomar a extensionalidade como um axioma, uma vez que as propriedades listadas acima, apesar de serem satisfeitas pelos mesmos números, são bastante diferentes.

O Axioma da Compreensão (Irrestrita)

- O axioma da compreensão irrestrita também é um dois princípios básicos capturam a concepção ingênua de conjuntos.
- **VERSÃO INFORMAL**: toda propriedade determinada define um conjunto.
  - **Ou seja**, dada qualquer propriedade determinada **P**, há um conjunto de todos os objetos que têm esta propriedade.
  - **Por exemplo**, o axioma da compreensão diz que a propriedade “*ser um número inteiro maior do que 6 e menor do que 10*” define um conjunto que, pelo axioma da extensionalidade, pode ser escrito como {7, 8, 9}.
- O problema com esta versão informal é que o conceito de propriedade precisaria ser formalizado para que esta definição se tornasse precisa.
- Não faremos isso, ao invés, trataremos apenas das ‘propriedades’ que podem ser expressas através de uma fórmula de primeira ordem (FOL) como **P(x)**.
- **VERSÃO EM FOL**: $\exists a\, \forall x\, [x \in a \leftrightarrow P(x)]$
  - Esta sentença diz que há um conjunto **a** cujos membros são todos e apenas aquelas coisas que satisfazem a fórmula **P(x)**.
    - Para termos certeza de que a sentença diz, de fato, isso, precisamos adicionar a restrição de que **a** não ocorre na wff **P(x)**.

- **ESQUEMA DE AXIOMAS**:
  - Note que este não é apenas UM axioma, mas uma **coleção INFINITA de axiomas**. um para cada **P(x)**.
  - Por isso é chamado de **esquema de axiomas**.
  - Veremos, mais adiante, que algumas instâncias deste esquema de axioma são inconsistentes (ou seja, há certos P(x) que tornam o axioma inconsistente). Mas, por enquanto, vamos assumir a compreensão irrestrita como um esquema de axiomas.

- **FEIXO UNIVERSAL**:

- Na verdade, o axioma da compreensão é um pouco mais geral do que nossa notação sugere. Isso porque a *wff* **P(x)** pode ter outras variáveis além de **x**, digamos $\mathbf{z_1, z_2, \ldots, z_n}$.
- O que é, de fato, o axioma, é o **feixo universal** da fórmula apresentada acima, onde todas estas outras variáveis são quantificadas universalmente:
  - $\forall z_1 \ldots \forall z_n \exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow P(x)]$

- **<u>RESTRIÇÃO DE PRIMEIRA-ORDEM</u>**: O axioma da compreensão, conforme expresso acima, é de certa maneira, mais simples do que a idéia expressa em sua versão informal. Afinal de contas já vimos que há muitas propriedades exprimíveis em português mas simplesmente inefáveis em FOL. É por isso que a Teoria dos Conjuntos que estamos estudando se chama Teoria dos Conjuntos de Primeira Ordem. Ela só trata dos conjuntos cujas propriedades definidoras são expressáveis em FOL.

Teorema da Unicidade

- Combinando o axioma da compreensão e o da extensionalidade, conseguimos provar uma proposição sobre os conjuntos que os distinguem claramente de propriedades.
- **<u>PROPOSIÇÃO 1</u>** Para cada *wff* P(x) podemos provar que há um único conjunto de objetos que satisfazem P(x). Em FOL:
  - $\forall z_1 \ldots \forall z_n \exists! a \forall x [x \in a \leftrightarrow P(x)]$
  - **<u>PROVA</u>**: provaremos utilizando o método da generalização universal. Sejam $\mathbf{z_1, z_2, \ldots, z_n}$ objetos arbitrários. O axioma da compreensão assegura que há pelo menos um conjunto de objetos que satisfaz **P(x)**. Então, precisamos apenas provar que <u>no máximo um</u> conjunto satisfaz P(x). Suponha que **a** e **b** sejam conjuntos que têm como membros exatamente os objetos que satisfazem P(x). Então, **a** e **b** satisfazem:
    - $\forall z_1 \ldots \forall z_n \forall x [x \in a \leftrightarrow P(x)]$
    - $\forall z_1 \ldots \forall z_n \forall x [x \in b \leftrightarrow P(x)]$
  - Mas então, disso se segue que:
    - $\forall x [x \in a \leftrightarrow x \in b]$
  - (Este passo óbvio usa, de fato, muitos passos formais. Veja o Exercício 15.5).
  - Para finalizar, se aplicamos o axioma da extensionalidade a esta última sentença, obtemos a = b.
  - Portanto, por generalização universal, provamos a proposição 1.

Notação de Barra

- A Proposição 1 mostra que dada uma *wff* P(x), nossos axiomas nos permitem deduzir a existência **do único** conjunto de objetos que a satisfazem.
- O conjunto de todos os objetos que satisfazem P(x) é escrito como:
  - $\{x / P(x)\}$

- A notação de barra, assim como a notação de lista é conveniente, mas não é essencial. Nenhuma delas é parte da linguagem de primeira ordem oficial da Teoria dos Conjuntos.
- Só usaremos estas notações em contextos informais.
- Vale lembrar que qualquer coisa que pode ser dita usando a notação de barra pode ser dita em nossa linguagem oficial. Exemplo:
- $b \in \{x / P(x)\}$ $\exists a\, [\forall x\, (x \in a \leftrightarrow P(x)) \wedge b \in a]$

AULA 10

LPL 15.2: Conjunto Unitário, Conjunto Vazio e Subconjunto

Conjunto Unitário

- Conjunto com um único elemento: $a = \{x\}$.
- É falso dizer que $a = x$. a é um conjunto, x pode ser qualquer coisa.
- O objeto x é diferente do conjunto $\{x\}$, ainda que x seja um conjunto.
    - $\{1, 2\}$ tem **dois** elementos, que são números.
    - $\{\{1, 2\}\}$ tem **um** elemento, que é um conjunto.

Conjunto Vazio $\varnothing$

- Considere o conjunto: $\{x / x \neq x\}$
- Mesmo não havendo nenhum x que satisfaça $x \neq x$, pelo Axioma da Compreensão, $\{x / x \neq x\}$ é um conjunto.
    - É um conjunto que não tem elementos, o conjunto vazio, que denotamos por $\varnothing$, ou na notação de lista, por **{ }**.
- Note que $\{\varnothing\}$ é um conjunto **unitário**, cujo elemento é o conjunto vazio.

Subconjunto $\mathbf{a \subseteq b}$

- $\mathbf{a \subseteq b}$ é uma abreviação para a sentença $\forall x\, [x \in a \rightarrow x \in b]$
- $\mathbf{a \subseteq b}$ afirma que todo elemento de a é elemento de b, ou seja, a é um subconjunto de b.
- Note que $\mathbf{a \in b}$ é completamente diferente de $\mathbf{a \subseteq b}$.

Proposição 2

Para qualquer conjunto **a**, $\mathbf{a \subseteq a}$. [em FOL: $\forall \mathbf{a}\ \mathbf{a \subseteq a}$]

PROVA: (note que $\forall \mathbf{a}\ \mathbf{a \subseteq a}$ é uma abreviação de $\forall \mathbf{a}\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{x \in a \rightarrow x \in a})$, usaremos, portanto, a generalização universal e o método condicional geral na prova)

- Seja **a** um conjunto arbitrário – [tendo em vista a generalização universal]
- Assuma, como premissa condicional geral que **c** $\in$ **a**.
- Por reiteração, é óbvio que **c** $\in$ **a**.
- Então, pelo método condicional geral, provamos que $\forall\mathbf{x}\ (\mathbf{x} \in \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{a})$
- Logo, por generalização universal, provamos que $\forall\mathbf{a}\ \forall\mathbf{x}\ (\mathbf{x} \in \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{a})$
- E isso, pela definição de $\subseteq$ é exatamente o que queríamos demonstrar: $\forall\mathbf{a}\ \mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}$.

Proposição 3

Para quaisquer conjuntos a e b, a = b se e somente se $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$.
[em FOL: $\forall a\ \forall b\ (a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a))$]

PROVA: (Por generalização universal)

- Sejam a e b conjuntos arbitrários. (vamos provar que assumindo o lado esquerdo do bicondicional obtemos o lado direito e que assumindo o lado direito, obtemos o lado esquerdo)

(1) Assuma, como hipótese condicional que a = b (provaremos que $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$)

- Pela **Proposição 2** sabemos que $a \subseteq a$ e $b \subseteq b$. Portanto, como a = b, por eliminação da identidade obtemos $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$.

(2) Assuma, como hipótese condicional que $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$. Note que:

- $a \subseteq b$ é abreviação de $\forall x\ (x \in a \rightarrow x \in b)$ e
- $b \subseteq a$ é abreviação de $\forall x\ (x \in b \rightarrow x \in a)$
- Então, da hipótese condicional é claro que: $\forall x\ (x \in b \leftrightarrow x \in a)$
- Logo, pelo Axioma da Extensionalidade, a = b.
- Portanto, em (1) e (2) provamos que $a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a)$
- E, como escolhemos a e b arbitrários, por generalização universal provamos o teorema:
- $\forall a\ \forall b\ (a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a))$

15.3 INTERSEÇÃO E UNIÃO

Interseção $\mathbf{a \cap b}$

- A interseção é uma **função** definida por:
  - $\forall a\ \forall b\ \forall z\ (z \in a \cap b \leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b))$

União $\mathbf{a \cup b}$

- A união é uma **função** definida por:

- $\forall a\ \forall b\ \forall z\ (z \in a \cup b \leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b))$

- **QUESTÃO** importante sobre as funções interseção e união:
  - Como sei que $\cap$ e $\cup$ definem conjuntos?
  - Ou seja, como sei que dados **a** e **b** conjuntos, **a $\cap$ b** e **a $\cup$ b** existem, são conjuntos e são únicos?
  - RESPOSTA: enquanto eu não PROVAR isso, **eu não sei**.
  - Esta questão nos faz refletir sobre um importante aspecto de qualquer teoria formal. Tudo o que sabemos em qualquer Teoria Formal precisa ser provado. Nossa intuição serve apenas para nos dar pistas do tipo de coisas que devemos ser capazes de provar. O que deve ser verdadeiro e o que deve ser falso.
  - Mas nossa intuição não vai além deste papel de guia. TODO o conhecimento em QUALQUER teoria formal deve ser obtido APENAS dos axiomas!
  - Tudo o que fazemos é provar proposições e utilizar estas proposições na prova de outras proposições mais complexas.
  - Desenvolver uma Teoria Formal é uma tarefa que exige extrema paciência e cautela. Os avanços são lentos, porém são seguros. Tão seguros quanto os AXIOMAS escolhidos e a própria LÓGICA.

Proposição 4

Para qualquer par de conjuntos **a** e **b** há um e apenas um conjunto **c** cujos elementos são os elementos de ambos **a** e **b**.

- **Em outras palavras**: para todo a e b, $c = a \cap b$ existe e é único.
- **Em FOL**: $\forall a\ \forall b\ \exists! c\ \forall x\ (x \in c \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b))$ [versão completa]
  $\forall a\ \forall b\ \exists! c\ c = a \cap b$ [versão abreviada]

PROVA:

- Note que esta proposição é apenas uma instância da **Proposição 1**.
- Lá provamos que: $\forall z_1\ \forall z_2\ \exists! a\ \forall x\ (x \in a \leftrightarrow P(x))$
- Bem, tomando $z_1 = a$; $z_2 = b$; $a = c$ e $P(x) = x \in z_1 \wedge x \in z_2$ então percebemos que a **Proposição 4** é mesmo apenas uma instancia da **Proposição 1**. Logo ela já está provada.

Proposição 5

Para qualquer par de conjuntos **a** e **b** há um e apenas um conjunto **c** tal que cada um de seus elementos é elemento de **a** ou de **b**.

- **Em outras palavras**: para todo a e b, $c = a \cup b$ existe e é único.
- **Em FOL**: $\forall a\ \forall b\ \exists! c\ \forall x\ (x \in c \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b))$ [versão completa]
  $\forall a\ \forall b\ \exists! c\ c = a \cup b$ [versão abreviada]

<u>PROVA</u>: Exatamente como a **Proposição 4**, a **Proposição 5** também é uma instância da **Proposição 1**, portanto já está provada.

<u>Proposição 6</u>

Sejam **a**, **b** e **c** conjuntos quaisquer.

1. $a \cap b = b \cap a$
2. $a \cup b = b \cup a$
3. $a \cap b = b$ se e somente se $b \subseteq a$
4. $a \cup b = b$ se e somente se $a \subseteq b$
5. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
6. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

<u>PROVA</u>: (faremos 2 itens e deixaremos os outras como exercícios)

- **<u>Item (1)</u>**: se segue da definição de interseção e do axioma da extensionalidade.
  - Mostraremos que $a \cap b = b \cap a$ mostrando que $a \cap b$ e $b \cap a$ têm exatamente os mesmos elementos e aplicando o Axioma da Extensionalidade.
  - A expressão formal FOL para o item 1 é: $\forall a \, \forall b \, (a \cap b = b \cap a)$
  - A prova é, então feita por generalização universal.
  - Seja a e b conjuntos genéricos.
  - Pela definição de $\cap$, qualquer elemento x:
  - $x \in a \cap b$ se e somente se $x \in a \wedge x \in b$.
  - $x \in b \cap a$ se e somente se $x \in b \wedge x \in a$.
  - Logo, é claro que $x \in a \cap b$ se e somente se $x \in b \cap a$.
  - Portanto, por extensionalidade, $a \cap b = b \cap a$.
  - Como a e b são genéricos, provamos o item 1.
- **<u>Item (3)</u>**: Provaremos os dois lados do condicional.

  (1) Da hipótese condicional $a \cap b = b$ provaremos que $b \subseteq a$.
  - Note que $b \subseteq a$ é apenas uma abreviação para $\forall x \, (x \in b \rightarrow x \in a)$
  - Então faremos a prova pelo método condicional geral.
  - Suponha, com hipótese condicional que x é um elemento arbitrário de b ($x \in b$).
  - Como, por hipótese (1) sabemos que $a \cap b = b$, então, $x \in a \cap b$.
  - Logo, pela definição de $\cap$**,** $x \in a$ e $x \in b$.
  - Assim, é claro que $x \in a$.

- Repare que partimos de $x \in b$ e chegamos a $x \in a$. Portanto, pelo método condicional geral, $\forall x\ (x \in b \to x \in a)$. Ou seja, $b \subseteq a$. E isso termina o lado (1)

(2) Da hipótese condicional $b \subseteq a$ provaremos $a \cap b = b$.

- Pela **Proposição 3**, para provar $a \cap b = b$, basta provarmos que $a \cap b \subseteq b$ e $b \subseteq a \cap b$.
- **Etapa 2.1** – prova de: $a \cap b \subseteq b$
  - Note que $x \in a \cap b$ se e somente se $x \in a$ e $x \in b$
  - Portanto, $\forall x\ (x \in a \cap b \to x \in b)$. Ou seja, $a \cap b \subseteq b$.
- **Etapa 2.2** – prova de: $b \subseteq a \cap b$
  - Pela definição de $\subseteq$ temos que provar que: $\forall x\ (x \in b \to x \in a \cap b)$
  - Usaremos o método condicional geral.
  - Assuma que x é um elemento arbitrário de b ($x \in b$).
  - Como, por hipótese (2), $b \subseteq a$, então, pela definição de $\subseteq$, $x \in a$.
  - Logo, como $x \in b$ e $x \in a$, então, pela definição de $\cap$, $x \in a \cap b$.
  - Note que partimos de $x \in b$ e chegamos a $x \in a \cap b$.
  - Portanto, provamos $\forall x\ (x \in b \to x \in a \cap b)$ e, pela definiçãod e $\subseteq$, provamos que $b \subseteq a \cap b$.
- Então, das etapas 2.1 e 2.2, pela **Proposição 3**, provamos que $a \cap b = b$.
- Repare que em (2), partimos de $b \subseteq a$ e provamos que $a \cap b = b$.
- Isso termina os dois lados do "se e somente se" do item 3, e finaliza sua prova.

* Veja os esboços FORMAIS destas provas nos arquivos **Proposição 6.1.prf** e **Proposição 6.3.prf**.

AULA 11

LPL 15.4: Conjuntos de Conjuntos

* O Axioma da Compreensão (juntamente com a Proposição 1) é bastante genérico e, em particular, nos permite construir conjuntos de conjuntos.
* Por exemplo, a partir dos conjuntos {0} e {0,1} podemos formar o conjunto {{0},{0,1}}. De maneira mais geral temos:

<u>Proposição 7</u> (Pares Desordenados)

Para quaisquer objetos x e y existe um único conjunto a tal que a = {x, y}

- **<u>Em FOL</u>**: $\forall x\ \forall y\ \exists ! a\ \forall w\ (w \in a \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$

<u>PROVA</u>:

- Considere x e y objetos arbitrários e seja $a = \{w \,/\, w = x \vee w = y\}$
- A existência de a está garantida pelo Axioma da Compreensão, e sua unicidade pelo Axioma da Extensionalidade. Claramente a tem como elementos x, y e nada mais.
- Outra maneira de fazer a prova é notar que a versão FOL da Proposição 7 é apenas uma instância da Proposição 1, que já foi demonstrada.

- Note que a **Proposição 7** pode ser generalizada para qualquer quantidade finita de objetos. Em particular:

Proposição 8 (Conjuntos Unitários)

Para qualquer objeto x, **existe** um **único** conjunto a tal que $a = \{x\}$

- **Em FOL**: $\forall x\, \exists! a\, \forall w\, (w \in a \leftrightarrow w = x)$

PROVA:

- Basta aplicar a Proposição 7, considerando $x = y$. Ou ainda notar que a Proposição 8 é apenas uma instância da Proposição 1.

Modelando Ordem – O Par ordenado $\langle x, y\rangle$

- O Axioma da Extensionalidade nos diz que os conjuntos {0,1} e {1,0} são idênticos, pois têm exatamente os mesmos elementos.
  - Ou seja, não há ordem nos conjuntos. Não existem primeiros, segundos, n-ésimos elementos.
- Será que há como modelarmos (simularmos) ordem na teoria dos conjuntos?
- Como expressar ordem em FOL?
  - Considere dois pares $\langle a, b\rangle$ e $\langle c, d\rangle$. Diremos que estes pares são ordenados se e somente se a seguinte sentença for verdadeira:
  - $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \leftrightarrow (a = b \wedge c = d)$
  - Note que os conjuntos {a, b} e {c, d} não satisfazem esta sentença, porque por Extensionalidade, $(a = d \wedge b = c) \rightarrow \{a, b\} = \{c, d\}$.
  - Já adianto que usaremos a notação $\langle x, y\rangle$ para indicar um par ordenado de objetos. x é o primeiro objeto e y é o segundo.
  - Também vale a pena notar que em FOL a noção de ordem é fundamental. Pois sabemos, por exemplo, que **Larger(a, b)** e **Larger(b, a)** dizem coisas completamente diferentes.
- Há várias maneiras de modelar ordem em conjuntos. A mais comum é definir:

  (A) $\forall x\, \forall y\, \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

- Note que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \neq \{\{y\}, \{x, y\}\} = \langle y, x\rangle$
- A partir desta definição é possível definir ordem, para qualquer **n**.

- Assim, um trio ordenado $\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$
- Em geral, uma n-upla ordenada $\langle x_1,..., x_n\rangle = \langle x_1, \langle ... ,\langle x_{n-1}, x_n\rangle\rangle$

- Repare como esta definição é artificial, vamos escrever em notação de lista o trio ordenado $\langle 0, 1, 2\rangle$.
  - $\langle 0, 1, 2\rangle = \langle 0, \langle 1, 2\rangle\rangle = \{\{0\}, \{0, \langle 1, 2\rangle\}\} = \{\{0\}, \{0, \{\{1\}, \{1,2\}\}\}\}$
  - Não faz mal que a definição é artificial, o importante é que, claramente, $\langle 0, 1, 2\rangle$ é diferente de, por exemplo, $\langle 1, 0, 2\rangle$ (que é $\{\{1\}, \{1, \{\{0\}, \{0,2\}\}\}\}$)
- O objetivo aqui é meramente teórico. Esta definição (a Definição (A)) nos permite utilizar conjuntos para falar de ordem. Isso é feito através destes agrupamentos dos elementos em conjuntos unitários e conjuntos de dois elementos expressos na Difinição (A).

15.5 MODELANDO RELAÇÕES NA TEORIA DOS CONJUNTOS

- Intuitivamente, um predicado binário, como **Larger**, expressa uma relação binária entre os objetos em um domínio do discurso **D**.
- Esta relação pode ser modelada em Teoria dos Conjuntos usando o recurso dos pares ordenados.
- Uma **relação binária** que modela o predicado **Larger** na Teoria dos Conjuntos é um conjunto de pares ordenados, assim definido: $\{\langle x, y\rangle / x \in D,\ y \in D$ e x é maior do que $y\}$
- Mais formalmente, considerando **d** como um conjunto específico de objetos, tal como um mundo qualquer do Mundo de Tarski, ou seja, **d** é um domínio do discurso específico. Então o seguinte conjunto representa a relação binária conjunto-teorética dos pares de elementos de **d** que satisfazem a proposição Larger(x, y):
  - $\{\langle x, y\rangle / \forall x \forall y (x \in d \wedge y \in d \wedge \text{Larger}(x, y))\}$
  - Este conjunto é chamado de **extensão** do predicado **Larger** no domínio **d**.
- De maneira geral, dado qualquer predicado binário **R(x, y)**, ou qualquer fórmula bem formada de FOL com duas variáveis livres **P(x, y)**, e qualquer domínio de objetos **d**, temos um conjunto que representa a relação binária conjunto-teorética que estas expressões em FOL definem. Para o caso de um predicado binário R(x, y) costuma-se chamar o conjunto de sua extensão de **R** :
  - $\mathbf{R} = \{\langle x, y\rangle / \forall x \forall y (x \in d \wedge y \in d \wedge R(x, y))\}$
- Note que o Axioma da Compreensão garante a existência deste conjunto (a relação conjunto-teorética) e o Axioma da Extensionalidade garante sua unicidade.

Diferenças entre Predicados e suas Extensões

- É importante lembrar que a extensão de um predicado pode depender das circunstâncias específicas em vigor no domínio do discurso. Por exemplo, se rodamos o mundo 90º no sentido horário no Mundo de Tarski, o domínio (**d**) dos objetos não se modifica, mas a extensão do predicado **LeftOf** antes do giro se torna a extensão do predicado **BackOf** depois do giro.
- Ou seja, os predicados binários não mudam, nem o significado do que eles expressam, mas as coisas que satisfazem estas relações podem sim mudar, dependendo das circunstâncias.

Propriedades de Relações

- Há algumas propriedades importantes que algumas relações possuem, para as quais temos nomes:

Transitividade: $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(y,z)]$ - em FOL

Se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, z\rangle \in R$, então, $\langle x, z\rangle \in R$ - em TC

Reflexividade: $\forall x\ R(x, x)$ - em FOL

$\langle x, x\rangle \in R$ - em TC

Irreflexividade: $\forall x\ \neg R(x, x)$:

$\langle x, x\rangle \notin R$

Simetria: $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$

$\langle x, y\rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$

Assimetria: $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \to \neg R(y, x))$

$\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R$

Antissimetria: $\forall x\ \forall y\ [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x = y]$

Se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, x\rangle \in R$, então, $x = y$.

- Estas propriedades de relações estão intimamente relacionadas com a Lógica das Sentenças Atômicas que estudamos no Capítulo 2.
- Na verdade, a regra **AnaCon**, funciona pois tem, internamente um conjunto de axiomas com as propriedades acima para os predicados da Linguagem dos blocos que as possuem.
- Assim, “dentro” de **AnaCon**, tem, por exemplo, a **transitividade** como axioma para todos os predicados transitivos da Linguagem dos Blocos (Larger, Smaller, LeftOf, RightOf, BackOf, FrontOf,... :
    - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(Larger(x, y) \wedge Larger(y, z)) \to Larger(y,z)]$
    - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(LeftOf(x, y) \wedge LeftOf(y, z)) \to LeftOf(y,z)]$
    - e assim por diante...
- Também tem, por exemplo, a **simetria** para (SameShape, SameCol, SameSize,...)
    - $\forall x\ \forall y\ (SameShape(x, y) \leftrightarrow SameShape(y, x))$
    - e assim por diante...
- Na verdade, do ponto de vista lógico, o **significado** de qualquer predicado é estabelecido através das suas propriedades que podemos expressar em FOL.

- Quando criamos uma linguagem FOL nova, ou seja, quando definimos predicados específicos, precisamos declarar quais as propriedades estes predicados têm. Por exemplo, o significado lógico do predicado **Larger** é dado pelas seguintes propriedades, que podemos estabelecer como axiomas de qualquer teoria que faça uso deste predicado:
    - Transitividade, Irreflexividade e Assimetria.
- Assim, na Teoria dos Conjuntos, os Axiomas da Extensionalidade e da Compreensão representam nada mais do que as propriedades que atribuímos ao predicado específico desta teoria que é $\in$.
    - São estes axiomas que estabelecem o "significado lógico" de $\in$.

Relações Inversas

- Há algumas propriedades importantes que algumas relações possuem, para as quais temos nomes:

*** CONTINUAR ***

RESUMO
LPL 15: Teoria Ingênua dos Conjuntos em Primeira Ordem

- **TEORIA FORMAL (de primeira ordem)**: conjunto de sentenças escritas em FOL que são consideradas verdadeiras (AXIOMAS) e que descrevem o "significado lógico" dos **predicados** e **constantes** utilizados.
- A **Teoria dos Conjuntos Ingênua** se constitui de 2 axiomas, que descrevem a noção intuitiva de conjuntos através do uso do predicado binário $\in$.
- **Desenvolver uma Teoria Formal** significa PROVAR todas as conseqüências lógicas destas teorias. Ou seja, provar as propriedades dos conjuntos que são conseqüência dos axiomas assumidos.
  - É isso que estamos fazendo com a TCI (Teoria dos Conjuntos Ingênua)

Axioma da Extensionalidade: os conjuntos são completamente caracterizados por seus elementos.
$\forall a\, \forall b\, [\forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b]$

Esquema de Axiomas da Compreensão (Irrestrita): toda propriedade exprimível em uma fórmula bem formada de FOL define um conjunto.
$\forall z_1 \ldots \forall z_n\, \exists a\, \forall x\, [x \in a \leftrightarrow P(x)]$ - $(z_1, \ldots, z_n)$ são as outras variáveis livres de P(x) além de x.

Proposição 1 (Teorema da Unicidade) Para cada *wff* P(x) podemos provar que há um único conjunto de objetos que satisfazem P(x). Em FOL: $\forall z_1 \ldots \forall z_n\, \exists! a\, \forall x\, [x \in a \leftrightarrow P(x)]$

Notação de Barra : O conjunto de todos os objetos que satisfazem P(x) é escrito como: $\{x \mid P(x)\}$

Conjunto Unitário: Conjunto com um único elemento: $a = \{x\}$.

Conjunto Vazio $\varnothing$**:** Conjunto sem elementos: $\{x \mid x \neq x\}$

Subconjunto $a \subseteq b$ - **$a \subseteq b$** é uma abreviação para a sentença $\forall x\, [x \in a \rightarrow x \in b]$

Proposição 2 Para qualquer conjunto **a**, $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}$. [em FOL: $\forall \mathbf{a}\; \mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}$]

Proposição 3 $\forall a\, \forall b\, (a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a))$]

Interseção $a \cap b$ - A interseção é uma **função** definida por: $\forall a\, \forall b\, \forall z\, (z \in a \cap b \leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b))$

União $a \cup b$ - A união é uma **função** definida por: $\forall a\, \forall b\, \forall z\, (z \in a \cup b \leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b))$

Proposição 4 Dados a e b quaisquer a Interseção existe e é única: $\forall a\, \forall b\, \exists! c\; c = a \cap b$

Proposição 5 para todo a e b, $c = a \cup b$ existe e é único: $\forall a\, \forall b\, \exists! c\; c = a \cup b$

Proposição 6 Sejam **a**, **b** e **c** conjuntos quaisquer.
1. $a \cap b = b \cap a$
2. $a \cup b = b \cup a$
3. $a \cap b = b$ se e somente se $b \subseteq a$
4. $a \cup b = b$ se e somente se $a \subseteq b$
5. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
6. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Proposição 7 (Pares Desordenados) $\forall x\, \forall y\, \exists! a\, \forall w\, (w \in a \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$

Proposição 8 (Conjuntos Unitários) $\forall x\, \exists! a\, \forall w\, (w \in a \leftrightarrow w = x)$

Modelando Ordem – O Par ordenado $\langle x, y \rangle$: $\forall x\, \forall y\, \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
Note que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \neq \{\{y\}, \{x, y\}\} = \langle y, x\rangle$
Em geral, uma n-upla ordenada $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle\rangle$

15.5 MODELANDO RELAÇÕES NA TEORIA DOS CONJUNTOS
- Para o caso de um predicado binário R(x, y) costuma-se chamar o conjunto de sua extensão de **R** :
  - $\mathbf{R} = \{\langle x, y\rangle \mid \forall x\, \forall y\, (x \in d \wedge y \in d \wedge R(x, y))\}$

Propriedades de Relações

Transitividade: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(y,z)]$ - em FOL
Se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, z\rangle \in R$, então, $\langle x, z\rangle \in R$ - em TC

Reflexividade: $\forall x\, R(x, x)$ - em FOL
$\langle x, x\rangle \in R$ - em TC

Irreflexividade: $\forall x\, \neg R(x, x)$:
$\langle x, x\rangle \notin R$

Simetria: $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$
$\langle x, y\rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$

Assimetria: $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$
$\langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$

Antissimetria: $\forall x\ \forall y\ [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y]$
Se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, x\rangle \in R$, então, $x = y$.

Relações Inversas: R^{-1} , a relação inversa de R é definida por:
$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle / \langle y, x\rangle \in R\}$ - (R^{-1} existe e é única !)

Relações de Equivalência
São relações que satisfazem as propriedades (REFLEXIVIDADE, SIMETRIA , TRANSITIVIDADE)

Classes de Equivalência
Fixado um conjunto **D** como Domínio do Discurso, uma relação de equivalência **R** entre os elementos deste domínio, e $x \in D$ um elemento do domínio, a Classe de Equivalência de x segundo a relação R é o seguinte conjunto:

$$[x]_R = \{y / y \in D \text{ e } \langle x, y\rangle \in R\}$$

Exemplo: considere,
D – o conjunto dos objetos do Mundo de Wittgenstein.
a – o tetraedro pequeno presente no Mundo de Wittgenstein.
R – a relação binária definida pelo predicado SameSize.
Temos: $[a]_R = \{y / y \in D \text{ e } \langle x, y\rangle \in R\}$ =
$[a]_{SameSize}$ = {y / y é objeto do Mundo de Wittgenstein e SameSize(a, y) é verdadeira no Mundo de Wittgenstein} =
$[a]_R = [a]_{SameSize}$ = "o conjunto de todos os objetos do mundo de Wittgenstein que são pequenos".

Proposição 9 Seja **R** uma relação de equivalência e **D** um conjunto.
1. Para cada x, $x \in [x]$
2. Para todo x, y, $[x] = [y]$ *se e somente se* $\langle x, y\rangle \in R$
3. Para todo x, y, $[x] = [y]$ *se e somente se* $[x] \cap [y] \neq \varnothing$

Funções
A noção matemática de função pode ser modelada em TC como um tipo especial de relação **R** que satisfaz a seguinte propriedade:
FUNCIONALIDADE: $\forall x\ \exists^{\leq 1} y\ R(x, y)$ - (para cada entrada há, no máximo uma saída)
Alguns fatos sobre funções:
FUNÇÃO TOTAL: $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$ - (definida em todos os elementos do domínio)
FUNÇÃO PARCIAL: quando não for total.
NOTAÇÃO: usamos as letras minúsculas f, g, h. Quando $\langle x, y\rangle \in f$ escrevemos: f(x)=y.
DOMÍNIO DE f : $D_f = \{x / x \in D \text{ e } \exists y\ f(x) = y\}$ - se $x \in D_f$, f está definida em x
IMAGEM DE f : $I_f = \{y / \exists x\ (x \in D \text{ e } f(x) = y)\}$

Conjunto Potência É o conjunto de todos os subconjuntos de um determinado conjunto. Pa

Proposição 10 Dado um conjunto qualquer, há um único conjunto que é seu conjunto potência.
EM FOL: $\forall b\ \exists! c\ \forall x\ (x \in c \leftrightarrow x \subseteq b)$

Proposição 11 Sejam **a** e **b** conjuntos:
1. $b \in Pb$
2. $\varnothing \in Pb$
3. $a \subseteq b$ *se e somente se* $Pa \subseteq Pb$

Proposição 12 $\forall b\ Pb \not\subseteq b$

Proposição 13 O conjunto de Russell de qualquer conjunto b ($rb = \{x / x \in b \wedge x \notin x\}$) é subconjunto mas não elemento de b ($rb \subseteq b$ e $rb \notin b$)

Exemplos de Conjuntos de Russell:
$b = \{0, 1\}$ ➔ $rb = \{0, 1\}$
$b = \{0, \{0, \{0, ...\}\}\}$ (descrito de outro modo, $b = \{0, b\}$) ➔ $rb = \{0\}$.

Proposição 14 Existe um conjunto c tal que $Pc \subseteq c$. ($\exists c\ Pc \subseteq c$)
$c = \{x / x = x\}$ é chamado de CONJUNTO UNIVERSO, denotado por **V**.

Intuitivamente, c (o conjunto **V**) é a coleção de Tudo o que existe. Então, qualquer coisa deve ser elemento de c. Em particular, todos os elementos de Pc devem ser elementos de c. Logo, $Pc \subseteq c$.

Paradoxo de Russell
(A) - Na Proposição 12, provamos que $\forall b\ Pb \not\subseteq b$ (que é equivalente a $\neg\exists b\ Pb \subseteq b$)
(B) - Na Proposição 14, provamos que, para $c = \{x / x = x\}$, $Pc \subseteq c$. (ou seja, $\exists b\ Pb \subseteq b$)

Assim, de (A) e (B) temos uma CONTRADIÇÃO, pois provamos $\neg\exists b\ Pb \subseteq b$ e $\exists b\ Pb \subseteq b$.
Esta contradição é chamada de Paradoxo de Russell (que o descobriu em 1903). O conjunto universo **V**, pelo que demonstramos nas proposições 12 e 14, tem a propriedade contraditória de que seu conjunto potência é e não é um subconjunto de **V**.

Problemas com a Teoria dos Conjuntos Ingênua
O que esta contradição nos mostra é simplesmente que não deve existir um tal conjunto {x / x = x}.
Não pode ser verdadeira a intuição expressa no axioma da compreensão de que **toda propriedade exprimível em linguagem de primeira ordem (FOL) determina um conjunto dos objetos que satisfazem esta propriedade**.
Há algo errado com nossas intuições iniciais sobre os conjuntos. É preciso modificarmos nossos axiomas de modo a não ser possível construir um conjunto como o conjunto universo.
A Teoria dos Conjuntos Zermelo-Frankel representa uma das possibilidades (a mais aceita) de modificar a TC de modo a evitar este tipo de paradoxos.

Teoria dos Conjuntos e o Problema Ontológico dos Universais
O que esta contradição nos mostra é simplesmente que não deve existir um tal conjunto {x / x = x}.
O Problema dos Universais, como tratado na metafísica desde a idade média pode ser expresso a través da seguinte pergunta:
Há entidades abstratas tais como: atributos, relações, classes, números, funções?
Há algo que seja O VERMELHO ou há apenas as coisas individuais vermelhas?
Costuma-se classificar as respostas tradicionais ao problema dos universais em três correntes:
- Realismo (tem relação com o platonismo)
- Conceitualismo (tem relação com o kantismo)
- Nominalismo (tem relação com o aristotelismo)

REALISMO: há os universais. Classes, relações, números, "o vermelho" existem (no céu platônico).
Em filosofia da lógica e da matemática a corrente chamada de **LOGICISMO** de (Frege, Russell, Whitehead, Church, Carnap, entre outros) é comprometida com a idéia de que propriedades quaisquer definem conjuntos que "existem".
Na teoria dos conjuntos, esta postura é admitida quando assumimos o Axioma da Compreensão Irrestrita. As propriedades definem conjuntos "QUE EXISTEM"!
Reparem que o realismo, o logicismo e o axioma da compreensão irrestrita expressam a MESMA idéia.
As Contradições na Teoria Ingênua dos Conjuntos representam um BANHO DE ÁGUA FRIA na abordagem REALISTA à questão dos universais, tanto quanto no LOGICISMO!!!
Aqui estamos usando a Lógica para fazer Filosofia, para resolver questões metafísicas!
Se as regras da lógica clássica estão corretas, então a postura realista leva a CONTRADIÇÕES. Ou seja, é INCOERENTE.

CONCEITUALISMO: há universais, mas apenas como produto da mente. A nossa razão cria categorias que são universais, que têm uma certa objetividade, na medida em que obedecem certas diretrizes racionais; e tem certa subjetividade, na medida em que são limitados às operações que nossas mentes limitadas e finitas podem efetuar.
Em filosofia da lógica e da matemática a corrente chamada de **INTUICIONISMO** de (Poincaré, Brower, Weyl, Troesltra,...) admite a existência de determinados conjuntos oriundos da extensão de propriedades. Desde que estas propriedades sejam limitadas a padrões de construção mental. O modo limitado do tratamento do infinito é uma das restrições mais importantes.
Há certas alterações intuicionistas à Teoria dos Conjuntos Ingênua que podem ser propostas e que evitam o Paradoxo de Russell.

NOMINALISMO: opõe-se à admissão de qualquer entidade universal (ou abstrata). Nem mesmo admite as "construídas pela mente".
Em filosofia da lógica e da matemática, a corrente chamada de **FORMALISMO** (de Hilbert) assume que a matemática e a lógica representam apenas um **jogo de notação não significante**. Jogo que pode, não obstante, ter alguma utilidade (nas ciências, na tecnologia).
Mas utilidade não implica, necessariamente, SIGNIFICÂNCIA.
Os matemáticos entram em acordo porque TODOS os seus conceitos podem ser reduzidos a REGRAS SINTÁTICAS DE MANIPULAÇÃO SIMBÓLICA.
Então, para os nominalistas/formalistas, nenhum conceito abstrato existe. Eles apenas, eventualmente, funcionam.