Teoria de Modelos
Notas de Aula

Daniel Durante Pereira Alves*

1 Introdução

1.1 O que é Teoria de Modelos?

- É o ramo da lógica matemática que lida com a relação entre uma linguagem formal e suas interpretações, ou modelos.
- Teoria de Modelos clássica é a teoria de modelos da lógica de predicados de primeira ordem.
- Um modelo é uma estrutura do tipo das estruturas comuns da matemática:
  - o campo dos números reais;
  - um grupo cíclico de ordem 5;
  - a estrutura parcialmente ordenada que consiste em todos os conjuntos de números inteiros ordenada por inclusão.
- Se estudarmos estes modelos de modo uniforme, sem considerar as linguagens formais, então estaremos trabalhando na área conhecida como álgebra universal.
- A linha que separa a álgebra universal da teoria de modelos é muitas vezes difusa. Nossa abordagem específica considera:

$$\text{álgebra universal} + \text{lógica} = \text{teoria de modelos}$$

*Professor do Departamento de Filosofia da UFRN.

- Para chegar à teoria de modelos, definimos nossa linguagem formal, que será a lógica de primeira ordem com identidade, especificando uma lista de símbolos e apresentando regras pelas quais as sentenças podem ser construídas a partir destes símbolos.

- A razão pela qual construímos uma linguagem formal é que queremos usar suas sentenças para dizer coisas sobre os modelos.

- Isto é obtido através de uma definição básica de verdade, que especifica para cada par formado por uma sentença e um modelo, um dos valores de verdade verdadeiro ou falso.

- A definição de verdade é a ponte que liga a linguagem formal com suas interpretações dadas por meio de modelos.

- Se a sentença φ leva o valor verdadeiro com o modelo $\mathfrak{A}$, dizemos que φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$ e também que $\mathfrak{A}$ é um modelo de φ. Caso contrário, dizemos que φ é falsa em $\mathfrak{A}$ e que $\mathfrak{A}$ não é um modelo de φ.

- Dizemos também que $\mathfrak{A}$ é um modelo do conjunto de sentenças Σ se e somente se $\mathfrak{A}$ é modelo de cada sentença de Σ.

- Que tipo de teoremas são provados em teoria de modelos? Já podemos dar alguns exemplos. Talvez o primeiro resultado da teoria de modelos tenha sido o *Teorema de Löwenheim*:

  - **Löwenheim-1915**: Se uma sentença tem um modelo infinito, então ela tem um modelo enumerável.

- Outro resultado clássico é o *Teorema da Compacidade*:

  - **Gödel-1930, Malcev-1936**: Se cada subconjunto finito de um conjunto Σ de sentenças tem um modelo, então o conjunto Σ todo tem um modelo.

- Um terceiro exemplo que podemos mencionar é um resultado mais recente, devido a Morley. Dizemos que um conjunto Σ de sentenças é *categórico na potencia* α se e somente se há, a menos de isomorfismo, exatamente um modelo de Σ de potencia α. O *Teorema de Morley* estabelece que:

  - **Morley-1965**: Se Σ é categórico em alguma potência não enumerável, então Σ é categórico em todas as potências não enumeráveis.

- Estes teoremas são resultados típicos da teoria de modelos. Eles dizem coisas negativas sobre o 'poder de expressão' da lógica de predicados de primeira ordem.

  - **Teorema de Löwenheim**: mostra que nenhuma sentença consistente pode implicar que um modelo é não enumerável. Ou seja, o conceito de não-enumerabilidade é inefável em primeira ordem.
  - **Teorema de Morley**: mostra que a lógica de predicados de primeira ordem, no que concerne à categoricidade, não consegue identificar a diferença entre potências não enumeráveis distintas. Ou seja, a distinção entre as diferentes cardinalidades não enumeráveis também é inefável em primeira ordem.
  - **Teorema da Compacidade**: tem sido usado para mostrar que muitas propriedades interessantes de modelos não podem ser expressas por um conjunto de sentenças de primeira ordem - por exemplo, não há nenhum conjunto de sentenças cujos modelos sejam precisamente todos os modelos finitos. Ou seja, o conceito de finitude também é inefável em primeira ordem.

- Mas estes três teoremas também dizem coisas positivas sobre a existência de modelos que possuem certas propriedades. De fato, em quase todos os teoremas mais centrais da teoria de modelos, a chave para suas prova é a construção do tipo certo de modelo.

- Por exemplo, voltemos ao teorema de Löwenheim. Para prová-lo temos que começar com um modelo não enumerável de uma dada sentença e construir, a partir dele, um modelo enumerável da mesma sentença.

- Da mesma forma, para provar o teorema da compacidade, devemos construir um único modelo no qual cada sentença de Σ é verdadeira.

- Até o teorema de Morley depende vitalmente da construção de um modelo. Para prová-lo começamos com a hipótese de que Σ tem 2 modelos diferentes de uma mesma potência não enumerável e construímos dois modelos diferentes para cada outra potência não enumerável.

- Existe um pequeno número de maneiras extremamente importantes nas quais os modelos tem sido construídos. Por exemplo, para vários propósitos eles podem ser construídos a partir de *constante individuas*, a partir de *funções*, a partir de *termos de Skolem* ou a partir de *uniões e cadeias*. Estas construções dão unidade ao assunto da Teoria de Modelos.

- O livro de Chang e Keisler, em larga medida, será organizado de acordo com as diferentes formas de construção de modelos. Outro ponto que dá unidade à teoria de modelos é a distinção entre *sintaxe* e *semântica*.

- **Sintaxe** se refere à estrutura puramente formal da linguagem. Por exemplo, o tamanho de uma sentença e a coleção de símbolos que ocorrem nela são propriedades sintáticas.

- **Semântica** se refere à interpretação ou significado da linguagem formal. A verdade ou falsidade de uma sentença em um modelo é uma propriedade semântica. Como veremos em breve, muito da teoria de modelos lida com a interconexão entre as ideias sintáticas e as semânticas.

1.1.1 Breve Esboço Histórico

- O mundo matemático foi forçado a observar que uma teoria pode ter mais de um modelo no século XIX, quando *Bolyai* e *Lobachevsky* desenvolveram a geometria não-Euclideana, e *Riemann* construiu um modelo no qual o postulado das paralelas era falso, mas todos os outros axiomas eram verdadeiros.

- Mais tarde, no século XIX, *Frege* formalizou o desenvolvimento da lógica de predicados, e *Cantor* desenvolveu a teoria de conjuntos ingênua na qual os nossos modelos vivem.

- A teoria de modelos é um campo novo. Não era considerada claramente como uma área de pesquisa separada na matemática até o início da década de 1950. No entanto, suas raízes históricas retrocedem aos campos mais antigos da *lógica*, *álgebra universal* e da *teoria dos conjuntos*, de modo que alguns dos resultados precursores, tais como o teorema de Löwenheim, são agora classificados como parte da teoria de modelos.

- Outros dos desenvolvimentos precursores importantes que contribuiram decisivamente para a teoria foram:

  - a extensão de (Skolem 1920) e Tarski ao teorema de Löwenheim;
  - o teorema de completude de (Gödel 1930) e sua generalização por (Malcev 1936);
  - a caracterização de conjuntos de números reais definíveis (Tarski 1931);
  - a definição regorosa de verdade de uma sentença em um modelo (Tarski 1933);
  - o estudo de sistemas relacionais (Tarski 1935);
  - a construção de um modelo não standard para a teoria dos números (Skolem 1934);
  - o estudo das classes equacionais, iniciado por (Birkhoff 1935).

- A teoria de modelos deve muito aos métodos gerais que foram originalmente desenvolvidos para propósitos especiais em ramos mais antigos da matemática.

- O termos 'Teoria de Modelos' é devido a (Tarski 1954). Hoje a literatura no assunto é bastante vasta. Em anos mais recentes, a teoria de modelos tem sido aplicada na obtenção de resultados significativos em outros campos, notavelmente em teoria dos conjuntos, álgebra e análise.

1.3 Linguagens, Modelos e Satisfação

- Uma linguagem $\mathcal{L}$ é uma coleção de símbolos que separamos em três grupos:

  - *Símbolos de Relações*: $\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$
  - *Símbolos de Funções*: $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots$
  - *Símbolos de Constantes (individuais)*: $\mathsf{c}_0, \mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \ldots$

- Se $\mathcal{L}$ for um conjunto finito, podemos apresentar os símbolos de $\mathcal{L}$ da maneira extensional:

$$\mathcal{L} = \{\mathsf{P}_0, \ldots, \mathsf{P}_\mathsf{n}, \mathsf{F}_0, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{m}, \mathsf{c}_0, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{q}\}$$

- Cada símbolo P de $\mathcal{L}$ denota uma *relação* n-ária para algum inteiro $n \geqslant 1$ dependente de P. Similarmente, cada símbolo F de $\mathcal{L}$ denota uma *função* m-ária para algum inteiro $m \geqslant 1$ dependente de F. Repare que relações e funções 0-árias não são permitidas.

- Quando estivermos lidando com muitas linguagens ao mesmo temo, usaremos as letras $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$, etc.

- Se os símbolos de uma certa linguagem forem bastante padrões, como por exemplo, $+$ para adição, $\leqslant$ para a relação de ordem, etc., então podemos para esta linguagem simplesmente escrever:

  $\mathcal{L} = \{\leqslant\}$

  $\mathcal{L} = \{\leqslant, +, \cdot, \mathsf{0}\}$

  $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}$

- A *potência* ou *cardinal* de uma linguagem $\mathcal{L}$ será denotado por $\|\mathcal{L}\|$ e definido como:

$$\|\mathcal{L}\| = \omega \cup |\mathcal{L}|$$

- Dizemos que uma linguagem $\mathcal{L}$ é enumerável ou não enumerável, dependendo se $\|\mathcal{L}\|$ é enumerável ou não enumerável.

- Quando a linguagem $\mathcal{L}'$ tem todos os símbolos da linguagem $\mathcal{L}$ e mais alguns, usamos a notação $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ e dizemos que a linguagem $\mathcal{L}'$ é uma *expansão* de $\mathcal{L}$ e que $\mathcal{L}$ é uma *redução* de $\mathcal{L}'$.

- No caso especial de $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ e todos os símbolos de $\mathcal{L}'$ que não são símbolos de $\mathcal{L}$ serem símbolos de constante, então $\mathcal{L}'$ é dita ser uma *expansão simples* de $\mathcal{L}$.

- Como $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são apenas conjuntos de símbolos, então, a expansão $\mathcal{L}'$ pode ser escrita como $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup X$, onde X é o conjunto dos símbolos novos.

- Um 'mundo possível', ou modelo para $\mathcal{L}$ consiste, antes de mais nada, de um *universo* A, um conjunto não vazio. Neste universo,
  - cada P n-ário corresponde a uma *relação* n-ária $R \subset A^n$.
  - cada F m-ário corresponde a uma *função* m-ária $G : A^m \to A$.
  - cada c corresponde a uma *constante* $x \in A$.
- Esta correspondência é dada por uma função interpretação $\mathcal{I}$ que mapeia os símbolos de $\mathcal{L}$ às relações, funções e constantes apropriadas em A.
- Um modelo para $\mathcal{L}$ é um par $\langle A, \mathcal{I} \rangle$. Usaremos letras góticas para designar modelos. Então escrevemos $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, \mathcal{J} \rangle$, $\mathfrak{C} = \langle C, \mathcal{K} \rangle$, etc., com subíndices e superíndices quando apropriado.
- Tentaremos ser bastante consistentes com esta nomenclatura, de modo que os universos dos modelos $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{B}_{\mathsf{i}}$ e $\mathfrak{B}_{\mathsf{j}}$ sejam precisamente os conjuntos B', B'', B_i e B_j.
- As relações, funções e constantes de $\mathfrak{A}$ são, respectivamente, as imagens segundo $\mathcal{I}$ dos símbolos de relação, símbolos de função e símbolos de constante de $\mathcal{L}$.
- Suponha que $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle A', \mathcal{I}' \rangle$ sejam modelos para $\mathcal{L}$, e que R e R' sejam relações de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$, respectivamente. Dizemos que R' é a *relação correspondente* a R se elas são as interpretações dos mesmos símbolos de relação em $\mathcal{L}$, isto é:

$$\mathcal{I}(\mathsf{P}) = R \text{ e } \mathcal{I}'(\mathsf{P}) = R' \text{ para algum } \mathsf{P} \in \mathcal{L}.$$

- Convenções similares são introduzidas com respeito a funções e constantes.
- Quando $\mathcal{L} = \{\mathsf{P}_0, \ldots, \mathsf{P}_\mathsf{n}, \mathsf{F}_0, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{m}, \mathsf{c}_0, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{q}\}$ escrevemos os modelos para $\mathcal{L}$ também extensionalmente, da forma:

$$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, \ldots, R_n, G_0, \ldots, G_m, x_0, \ldots, x_q \rangle$$

- Quando os símbolos de $\mathcal{L}$ forem familiares, usaremos, por exemplo,

$$\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant, +, \cdot \rangle$$

para os modelos da linguagem $\mathcal{L} = \{\leqslant, +, \cdot\}$. Podemos reorganizar as notações dos modelos para

$$\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_{\mathfrak{A}}, +_{\mathfrak{A}}, \cdot_{\mathfrak{A}} \rangle \qquad \mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_{\mathfrak{B}}, +_{\mathfrak{B}}, \cdot_{\mathfrak{B}} \rangle$$

se o contexto da discussão assim necessitar.

- Partindo de um modelo $\mathfrak{A}$ para a linguagem $\mathcal{L}$, podemos sempre expandir este modelo para a linguagem $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup X$ interpretando adequadamente os símbolos de X:
  - Se $\mathcal{I}'$ é uma interpretação qualquer para os símbolos em X, e X é disjunto de $\mathcal{L}$, então $\mathfrak{A}' = \langle A, \mathcal{I} \cup \mathcal{I}' \rangle$ é um modelo para $\mathcal{L}'$.
  - Neste caso dizemos que $\mathfrak{A}'$ é uma *expansão* de $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}'$, e que $\mathfrak{A}$ é uma *redução* de $\mathfrak{A}'$.
- Algumas vezes usaremos a notação mais curta $(\mathfrak{A}, \mathcal{I}')$ para $\mathfrak{A}'$.
- Há claramente muitas formas pelas quais um modelo $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$ pode ser expandido a um modelo $\mathfrak{A}'$ para $\mathcal{L}'$. Ao passo que dado um modelo $\mathfrak{A}'$ para $\mathcal{L}'$, há apenas uma redução $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$. Nomeadamente obtemos $\mathfrak{A}$ restringindo a função de interpretação $\mathcal{I}'$ de $\mathcal{L} \cup X$ para $\mathcal{L}$. Os processos de expansão e redução não alteram o universo do modelo.
- O *cardinal* ou *potência* do modelo $\mathfrak{A}$ é o cardinal $|A|$.
- Diz-se que $\mathfrak{A}$ é finito, enumerável ou não enumerável quando $|A|$ for finito, enumerável ou não enumerável, respectivamente.

Noções e Operções Básicas sobre Modelos

- Dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ para $\mathcal{L}$ são *isomórficos* se e somente se há uma funcao bijetora de A em A' que satisfaz as seguintes propriedades:

  1. Para cada relação n-aria R de $\mathfrak{A}$ e sua relação correspondente R' de $\mathfrak{A}'$:

$$R(x_1 \dots x_n) \quad \text{se e somente se} \quad R'(f(x_1) \dots f(x_n))$$

para todo $x_1, \dots, x_n$ em A.

2. Para cada função m-ária G de $\mathfrak{A}$ e sua função correspondente G' de $\mathfrak{A}'$:

$$f(G(x_1 \dots x_m)) = G'(f(x_1) \dots f(x_m))$$

para todo $x_1, \dots, x_m$ em A.

3. Para cada constante x de $\mathfrak{A}$ e sua constante correspondente x' de $\mathfrak{A}'$:

$$f(x) = x'$$

- Uma função f que satisfaz as condições acima é chamada um *isomorfismo de* $\mathfrak{A}$ *sobre* $\mathfrak{A}'$, ou um *isomorfismo entre* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{A}'$.

- Usaremos a notação $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ para denotar que f é um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{A}'$, e usaremos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ para $\mathfrak{A}$ é *isomórfico* a $\mathfrak{A}'$.

- Por conveniência, usaremos $\cong$ para denotar a *relação de isomorfismo* entre modelos para $\mathcal{L}$.

- É bastante claro que $\cong$ é uma relação de equivalência e, além disso, que ela preserva potência, ou seja, se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, então $|A| = |B|$.

- De fato, a menos que queiramos considerar a estrutura particular de cada elemento de A ou B, para todos os propósitos práticos, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são isomórficos, então eles são o mesmo modelo.

- Um modelo $\mathfrak{A}'$ é chamado de *submodelo* de $\mathfrak{A}$ se $A' \subset A$ e:

  1. Cada relação n-ária R' de $\mathfrak{A}'$ é a restrião a $\mathfrak{A}'$ de sua relação correspondente R de $\mathfrak{A}$, isto é, $R' = R \cap (A')^n$.
  2. Cada função m-ária G' de $\mathfrak{A}'$ é a restrição a $\mathfrak{A}'$ de sua função correspondente G de $\mathfrak{A}$, isto é, $G' = G|(A')^m$.
  3. Cada constante de $\mathfrak{A}'$ é constante correspondente de constante de $\mathfrak{A}$.

- Usaremos $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ para denotar que $\mathfrak{A}'$ é um submodelo de $\mathfrak{A}$.

- Fica como tarefa do leitor mostrar que $\subset$ é uma relação de ordem parcial e que, se $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ então $|A| \leqslant |B|$.

- Quando $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma *extensão* de $\mathfrak{A}$.

- Combinando as duas noções anteriores, de isomorfismo e de submodelo, dizemos que $\mathfrak{A}$ é *isomorficamente imerso* em $\mathfrak{B}$ se há um modelo $\mathfrak{C}$ e um isomorfismo f tal que $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$. Neste caso a função f é chamada de *imersão isomórfica de* $\mathfrak{A}$ *em* $\mathfrak{B}$.

- Se $\mathfrak{A}$ é isomorficamente imerso em $\mathfrak{B}$, então $\mathfrak{B}$ é isomórfico a uma extensão de $\mathfrak{A}$.

Linguagem de Primeira Ordem

- Para formalizar uma linguagem $\mathcal{L}$, precisamos dos seguintes *símbolos lógicos*:

  parênteses:), (;

  variáveis: $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{n}, \ldots$;

  conectivos: $\wedge$ (and), $\neg$ (não);

  quantificadores: $\forall$ (para todo);

  e um símbolo de relação binária $\equiv$ (para a identidade).

- Assumiremos que nenhum símbolo da lista acima ocorre em $\mathcal{L}$.

- Algumas sequências de símbolos da lista acima e de $\mathcal{L}$ são chamadas de *termos*, que são definidos como:

1.3.1 Definição – Termo

1. Uma variável v é um termo.

2. Um símbolo de constante c é um termo.

3. Se F é um símbolo de função m-ária e $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_\mathsf{m}$ são termos, então $\mathsf{F}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{m})$ é um termo.

4. Uma sequência de símbolos é um termo apenas se puder ser demonstrado que é um termo por um número finito de aplicações de 1-3.♦

- As fórmulas atômicas de $\mathcal{L}$ são squências de símbolos da seguinte forma:

1.3.2 Definição – Fórmula Atômica

1. $\mathsf{t}_1 \equiv \mathsf{t}_2$ é uma fórmula atômica, dado que t_1 e t_2 sejam termos de $\mathcal{L}$.
2. Se P é um símbolo de relação n-ária e $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_\mathsf{n}$ são termos, então $\mathsf{P}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n})$ é uma fórmula atômica.⧫

- Finalmente, as *fórmulas* de $\mathcal{L}$ são definidas como:

1.3.3 Definição – Fórmula

1. Uma fórmula atômica é uma fórmula.
2. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ e $(\neg\varphi)$ são fórmulas.
3. Se v é uma variável e φ é uma fórmula, então $(\forall \mathsf{v})\,\varphi$ é uma fórmula.
4. Uma sequência de símbolos é uma fórmula apenas se puder ser demonstrado que é uma fórmula por um número finito de aplicações de 1-3.⧫

- As definições de termos e fórmulas acima podem ser interpretadas na teoria dos conjuntos. Neste caso, o conjunto dos termos de $\mathcal{L}$ é o menor conjunto T tal que T contenha todos os símbolos de constante, todas as variáveis v_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e, sempre que F for um símbolo de função m-ário e $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_\mathsf{m} \in T$, então $\mathsf{F}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{m}) \in T$.
- Similarmente, o conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}$ é o menor conjunto Φ tal que toda fórmula atômica pertence a Φ e, sempre que $\varphi, \psi \in \Phi$ e v for uma variável, então $(\varphi \wedge \psi), (\neg\varphi), (\forall \mathsf{v})\,\varphi$ todos pertencem a Φ.
- Repare que utilizamos, tacitamente, as letras t (com subíndices) para nos referirmos a termos, v para nos referirmos a variáveis e φ, ψ para nos referirmos a fórmulas.
- Enfatizamos mais uma vez que propriedades sobre termos e fórmulas podem ser estabelecidas apenas através de indução baseadas nas definições 1.3.1 e 1.3.3.

- Podemos agora introduzir as abreviações usuais em nossa linguagem para tornar as sentenças mais legíveis. Os símbolos $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (implica) e $\leftrightarrow$ (se e somente se) são abreviações definidas como:

  $(\varphi \vee \psi)$ é uma abreviação para $(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)))$,

  $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma abreviação para $((\neg\varphi) \vee \psi)$,

  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma abreviação para $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$,

  $(\exists \mathsf{v})\, \varphi$ é uma abreviação para $\neg(\forall \mathsf{v})\, \neg\varphi$.

- É claro que $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\exists$ poderiam muito bem terem sido incluídos na nossa lista de símbolos como mais três conectivos. No entanto, há certas vantagens em manter nossa lista curta. Isso fará com que nossas provas por indução baseadas nas definições de fórmulas tenham menos casos.

- Outra abreviação que adotaremos é a de não usar parênteses redundantes. Por exemplo não devemos nos preocupar em colocar os parênteses mais externos de uma sentença. Então, $\neg\varphi$ será uma abreviação para a sentença $(\neg\varphi)$.

- Também seguiremos o modo padrão da precedência de conectivos para o abandono de outros parênteses. Assim, $\neg$ tem mais precedência que $\wedge$ e $\vee$, que por sua vez têm mais precedência que $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Então, a sentença $\neg\varphi \vee \psi \rightarrow \theta \wedge \varphi$ deve ser interpretada como uma abreviação para $(((\neg\varphi) \vee \psi) \rightarrow (\theta \wedge \varphi))$.

- Algumas outras convenções de abreviação são as seguintes:

  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ abrevia $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n))$;

  $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ abrevia $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n))$;

  $(\forall \mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2 \ldots \mathsf{x}_n)\, \varphi$ abrevia $(\forall \mathsf{x}_1)(\forall \mathsf{x}_2) \ldots (\forall \mathsf{x}_n)\varphi$;

  $(\exists \mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2 \ldots \mathsf{x}_n)\, \varphi$ abrevia $(\exists \mathsf{x}_1)(\exists \mathsf{x}_2) \ldots (\exists \mathsf{x}_n)\varphi$.

- Assumiremos que o leitor tem alguma familiaridade com a lógica de predicados de primeira ordem, de modo entender os seguintes conceitos e distinções: *subfórmula*, *ocorrência livre* e *ligada* de variável em fórmula, e a *substituição* de variável por termo em uma fórmula.

- **Convenção Importante**: usaremos $\mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ para denotar um termo t cujas variáveis são um subconjunto de $\{\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{n}\}$. Similarmente, usaremos $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ para denotar uma fórmula φ cujas variáveis livres são um subconjunto de $\{\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{n}\}$.

- Repare que não exigimos que todas as variáveis $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{n}$ sejam variáveis livres de $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$. Na verdade, $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ poderia até nem ter nenhuma variável livre.

- Também não fazemos nenhuma restrição sobre as variáveis ligadas. Por exemplo, cada uma das fórmulas seguintes tem a forma $\varphi(\mathsf{v}_0\mathsf{v}_1\mathsf{v}_2)$:

  $(\forall \mathsf{v}_1)\,(\exists \mathsf{v}_3)\,\mathsf{R}(\mathsf{v}_0\mathsf{v}_1\mathsf{v}_3) \quad \mathsf{R}(\mathsf{v}_0\mathsf{v}_1\mathsf{v}_2) \quad \mathsf{S}(\mathsf{v}_0\mathsf{v}_2) \quad (\forall \mathsf{v}_4)\,\mathsf{S}(\mathsf{v}_4\mathsf{v}_4)$

- Uma *sentença* é uma fórmula sem variáveis livres.

- Note que mesmo que $\mathcal{L}$ não tenha símbolos, ainda haverá fórmulas de $\mathcal{L}$. Estas fórmulas são construídas totalmente com a relação de identidade e os demais símbolos lógicos (variáveis, conectivos, quantificadores e parênteses). Estas fórmulas são chamadas de *fórmulas da identidade* e elas *ocorrem em todas as linguagens*.

1.3.4 Proposição

A cardinalidade do conjunto de todas as fórmulas de $\mathcal{L}$ é $\|\mathcal{L}\|$.♦

- Para definirmos um *sistema formal* de lógica, precisamos, além de todas as noções sintáticas acima, das definições de *axiomas lógicos* e de *regras de inferência*. Dividiremos os axiomas lógicos para $\mathcal{L}$ em três grupos:

1.3.5 Definição – Axiomas Sentenciais

Toda fórmula φ de $\mathcal{L}$ que pode ser obtida de uma tautologia ψ de $\mathcal{I}$ através de substituição simultânea e uniforme dos símbolos sentenciais de ψ por fórmulas de $\mathcal{L}$ é um *axioma lógico* para $\mathcal{L}$. Daqui para frente chamaremos uma tal fórmula φ de *tautologia* de $\mathcal{L}$.

1.3.6 Definição – Axiomas Quantificacionais

1. Se φ, ψ são fórmulas de $\mathcal{L}$ e v é uma variável que não ocorre livre em φ então a fórmula

$$(\forall \mathsf{v})\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall \mathsf{v})\,\psi)$$

   é um axioma lógico.

2. Se φ, ψ são fórmulas e ψ é obtida de φ através de uma substituição livre de cada ocorrência livre de v em φ pelo termo t (isto é, nenhuma variável x em t pode ocorrer ligada em ψ no lugar em que é introduzida), então a fórmula

$$(\forall \mathsf{v})\,\varphi \to \psi$$

   é um axioma lógico.

1.3.7 Definição – Axiomas da Identidade

Sejam x, y variáveis, $\mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ um termo e $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ uma fórmula atômica. Então as fórmulas:

- $\mathsf{x} \equiv \mathsf{x}$
- $(\mathsf{x} \equiv \mathsf{y}) \to (\mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_{\mathsf{i}-1}\ \mathsf{x}\ \mathsf{v}_{\mathsf{i}+1} \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}) \equiv \mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_{\mathsf{i}-1}\ \mathsf{y}\ \mathsf{v}_{\mathsf{i}+1} \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}))$
- $(\mathsf{x} \equiv \mathsf{y}) \to (\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_{\mathsf{i}-1}\ \mathsf{x}\ \mathsf{v}_{\mathsf{i}+1} \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}) \to \varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_{\mathsf{i}-1}\ \mathsf{y}\ \mathsf{v}_{\mathsf{i}+1} \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}))$

são axiomas lógicos.

1.3.8 Definição – Regra da Separação (ou Modus Ponens)

- De φ e $\varphi \to \psi$ infere-se ψ.

1.3.9 Definição – Regra da Generalização

- De φ infere-se $(\forall \mathsf{x})\,\varphi$.♦

- Dados os axiomas e regras de inferência, assumiremos que as noções resultantes de *prova*, *comprimento de prova* e *teorema* já são familiares ao leitor.

- Também faremos uso livre dos principais teoremas e metateoremas básicos da lógica de primeira ordem com identidade, assumindo-os conhecidos pelos leitores.

- Seguindo o uso padrão, $\vdash \varphi$ significa que φ é um teorema de $\mathcal{L}$.

- Se Σ é um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$, então $\Sigma \vdash \varphi$ significa que há uma prova de φ a partir dos axiomas lógicos e de Σ.

- Se $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ é finito, então escrevemos $\sigma_1 \ldots \sigma_n \vdash \varphi$.

- Como os axiomas lógicos são sempre assumidos, sempre que $\Sigma \vdash \varphi$ diremos que *há uma prova de φ a partir de Σ, ou que φ é deduzível de Σ.*

- Σ é *inconsistente* se e somente se toda fórmula de $\mathcal{L}$ puder ser deduzida de Σ. Caso contrário Σ é *consistente.*

- A sentença σ é consistente se e somente se $\{\sigma\}$ for consistente.

- Σ é *consistente maximal* (em $\mathcal{L}$) se e somente se Σ é consistente e nenhum conjunto de sentenças (de $\mathcal{L}$) que contenha propriamente Σ é consistente.

- A proposição a seguir apresenta várias propriedades úteis dos conjuntos de sentenças consistentes e consistentes maximais.

1.3.10 Proposição

1. Σ é consistente se e somente se todo subconjunto finito de Σ é consistente.

2. Seja σ uma sentença. $\Sigma \cup \{\sigma\}$ é inconsistente se e somente se $\Sigma \vdash \neg\sigma$. Portanto $\Sigma \cup \{\sigma\}$ é consistente se e somente se $\neg\sigma$ não é deduzível a partir de Σ ($\Sigma \nvdash \sigma$).

3. Se Σ é consistente maximal, então para cada sentença σ, τ:

   - $\Sigma \vdash \sigma$ se e somente se $\sigma \in \Sigma$;
   - $\sigma \notin \Sigma$ se e somente se $\neg\sigma \in \Sigma$;
   - $\sigma \wedge \tau \in \Sigma$ se e somente se $\sigma \in \Sigma$ e $\tau \in \Sigma$.

4. (Teorema da Dedução) $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ se e somente se $\Sigma \vdash \sigma \to \tau$ (Aqui σ é uma sentença, no entanto τ não precisa ser).

1.3.11 Proposição – Teorema de Lindenbaum

Qualquer conjunto de sentenças consistente de $\mathcal{L}$ pode ser estendido a um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$ consistente maximal.

Prova

- Vamos arranjar todas as sentenças de $\mathcal{L}$ em uma lista $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha, \ldots$ A ordem na qual as sentenças são listadas é imaterial (irrelevante) desde que a lista seja uma correspondência um-a-um (bijeção) entre os primeiros números ordinais e cada sentença da lista.

- Formaremos uma cadeia crescente

$$\Sigma = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_\alpha \subset \ldots$$

  de conjuntos de sentenças consistentes da seguinte forma:

- Se $\Sigma \cup \{\varphi_0\}$ for consistente, definimos $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\varphi_0\}$. Caso contrário, $\Sigma_1 = \Sigma$.

- No α-ésimo passo, definimos $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ se $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ for consistente. Caso contrário, $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha$.

- Nos passos para os ordinais limites α tomamos as uniões $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta$.

- Agora considere Γ a união de todos os conjuntos Σ_α. Alegamos que Γ é consistente. Suponha, por absurdo, que não seja.

- Então toda fórmula de $\mathcal{L}$ é dedutível a partir de Γ. Em particular, há uma dedução $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$ da sentença $\sigma \wedge \neg\sigma$ a partir de Γ.

- Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_q$ todas as sentenças em Γ que são usadas nesta dedução.

- Podemos então tomar um ordinal α tal que todas as sentenças $\theta_1, \ldots, \theta_q$ pertençam a Σ_α.

- Mas isto significa que Σ_α é inconsistente, o que é uma contradição, já que de acordo com nossa construção acima, todo Σ_α é consistente.

- Portanto descartamos nossa hipótese do absurdo e concluímos que Γ é consistente.

- Resta agora provar que Γ é consistente maximal. Alegamos que este é o caso. Suponha que Δ é consistente e $\Gamma \subset \Delta$.

- Lembremos de nossa lista de todas as sentenças de $\mathcal{L}$. Então, uma sentença qualquer de Δ é uma sentença φ_α de nossa lista.

- Como Δ é consistente e $\Sigma_\alpha \subset \Gamma \subset \Delta$, então $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ é consistente, e então, $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$. Então, $\varphi_\alpha \in \Gamma$.

- Logo, mostramos que todo elemento de Δ é elemento de Γ. Então $\Delta \subset \Gamma$ e como por hipótese $\Gamma \subset \Delta$, então $\Delta = \Gamma$. Logo, Γ é consistente maximal. ⧫

A Definição de Satisfação e Verdade

- A definição de satisfação que veremos a seguir é o fundamento principal de toda a teoria de modelos.

- As sentenças de $\mathcal{L}$ dizem coisas sobre elementos individuais dos modelos. Por isso, a questão completa sobre as verdades ou falsiddes de primeira ordem de um mundo possível (ou seja, modelo) não é um problema simples.

- Por exemplo, não há um procedimento de decisão para saber se uma dada sentença de $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \mathsf{S}, \mathsf{0}\}$ é verdadeira ou falsa no modelo padrão $\langle N, +, \cdot, S, 0\rangle$ da aritmética (onde S é a função sucessor).

- Antes de formalizar a definição apresentaremos sua motivação através de comentários informais.

- Para definir a noção

  "a sentença σ é verdadeira no modelo $\mathfrak{A}$",

  temos que quebrar σ em partes menores e examinar cada parte.

- Quando σ é $\neg\varphi$ ou $\varphi \wedge \psi$, então vemos que a verdade ou falsidade de σ em $\mathfrak{A}$ é conhecida, uma vez que conheçamos a verdade ou falsidade de φ e ψ em $\mathfrak{A}$.

- Mas quando σ é $(\forall \mathsf{x})\, \varphi$, então o método acima para decidir a verdade de σ não funciona, pois φ pode não ser uma sentença e, portanto, não haveria sentido perguntar se φ é verdadeira ou falsa em $\mathfrak{A}$.

- A variável livre x em φ supostamente varia sobre todos os elementos de A. Para cada particular $a \in A$ faz sentido perguntar se:

  "a fórmula φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$, admitindo que φ refere-se a a".

  Se para todo $a \in A$ a resposta a esta questão for sim, então podemos dizer que σ é verdadeiro em $\mathfrak{A}$. Se existir algum a para o qual a resposta for não, então dezemos que σ é falso em $\mathfrak{A}$.

- Mas para responder a questão destacada acima, mesmo que seja para um elemento fixo de A, nós cairemos na mesma dificuldade se φ for da forma $(\forall \mathsf{y})\, \psi$. Então somos levados a perguntar:

  "ψ é verdadeira em $\mathfrak{A}$, admitindo que ψ refere-se ao par de elemntos a e b em A".

- Basta mais um pequeno passo para percebermos que a questão crucial é a seguinte:

  > Dada uma fórmula $\varphi(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ e a sequência $x_0, \ldots, x_p$ em A, o que significa dizer que φ é verdadeira em $\mathfrak{A}$ caso os valores para as variáveis $\mathsf{v_0}, \ldots, \mathsf{v_p}$ sejam tomados como $x_0, \ldots, x_p$?

- Nosso plano é dar uma resposta a esta questão primeiro para toda fórmula atômica $\psi(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ e todos os elementos $x_0, \ldots, x_p$. Então, através de um procedimento indutivo, baseado em nossa definição indutiva de fórmula (1.3.1 – 1.3.3) daremos uma resposta para todas as fórmulas $\varphi(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ e elementos $x_0, \ldots, x_p$.

- Ainda há uma dificuldade a considerarmos. Mesmo que todas as variáveis livres de uma fórmula φ estejam entre $\mathsf{v_0}, \ldots, \mathsf{v_p}$, disso não se segue que todas as variáveis livres de cada subfórmula de φ estarão entre $\mathsf{v_0}, \ldots, \mathsf{v_p}$, pois variáveis ligadas de φ eventualmente serão variáveis livres de alguma subfórmula de φ.

- No entanto, sabemos que se todas as variáveis de φ, sejam elas livres ou ligadas, estão entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{p}$, então todas as variáveis de cada subfórmula de φ estão entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{p}$. Levaremos este fato em consideração.

- Estamos agora prontos para a definição formal. A noção crucial a ser definida é a seguinte: Seja φ uma fórmula de $\mathcal{L}$, em que todas as suas variáveis livres e ligadas estão entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{q}$, e seja $x_0, \ldots, x_q$ uma sequência qualquer de elementos de A. Definimos o predicado:

1.3.12 Definição

φ é *satisfeita* por uma sequência $x_0, \ldots, x_q$ em $\mathfrak{A}$, ou $x_0, \ldots, x_q$ *satisfaz* φ em $\mathfrak{A}$. ♦

- A Definição procede em três estágios (compare os três estágios abaixo com 1.3.1 – 1.3.3).

- Seja $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathcal{L}$.

1.3.13 Definição

O valor de um termo $\mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{q})$ para $x_0, \ldots, x_q$ é definido como se segue (denotaremos este valor por $\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q]$):

1. Se $\mathsf{t} = \mathsf{v}_\mathsf{i}$, então $\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = x_i$.

2. Se t é um símbolo de constante c, então $\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q]$ é a interpretação de c em $\mathfrak{A}$ ($\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = \mathcal{I}_\mathfrak{A}(\mathsf{c})$).

3. Se $\mathsf{t} = \mathsf{F}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{m})$, onde F é um símbolo de função m-ária, então

$$\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = G(\mathsf{t}_1[x_0 \ldots x_q] \ldots \mathsf{t}_\mathsf{m}[x_0 \ldots x_q])$$

   onde G é a interpretação de F em $\mathfrak{A}$.

1.3.14 Definição

1. Suponha que $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{q})$ é a fórmula atômica $\mathsf{t}_1 \equiv \mathsf{t}_2$, onde $\mathsf{t}_1(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{q})$ e $\mathsf{t}_2(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{q})$ são termos. Então $x_0, \ldots, x_q$ *satisfaz* φ se e somente se

$$\mathsf{t}_1[x_0 \ldots x_q] = \mathsf{t}_2[x_0 \ldots x_q]$$

2. Suponha que $\varphi(\mathsf{v_0} \dots \mathsf{v_q})$ é a fórmula atômica $\mathsf{P}(\mathsf{t_1} \dots \mathsf{t_n})$, onde P é um símbolo de relação n-ária e $\mathsf{t_1}(\mathsf{v_0} \dots \mathsf{v_q}), \dots, \mathsf{t_n}(\mathsf{v_0} \dots \mathsf{v_q})$ são termos. Então $x_0, \dots, x_q$ *satisfaz* φ se e somente se

$$R(\mathsf{t_1}[x_0 \dots x_q] \dots \mathsf{t_n}[x_0 \dots x_q])$$

onde R é a interpretação de P em $\mathfrak{A}$. ♦

- Por brevidade escreveremos $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0 \dots x_n]$ para: $x_0, \dots, x_q$ satisfaz φ em $\mathfrak{A}$.

- Então a definição 1.3.14 pode ser reformulada como:

  1. $\mathfrak{A} \models (\mathsf{t_1} \equiv \mathsf{t_2})[x_0 \dots x_q] \iff \mathsf{t_1}[x_0 \dots x_q] = \mathsf{t_2}[x_0 \dots x_q]$.
  2. $\mathfrak{A} \models \mathsf{P}(\mathsf{t_1} \dots \mathsf{t_n})[x_0 \dots x_q] \iff R(\mathsf{t_1}[x_0 \dots x_q] \dots \mathsf{t_n}[x_0 \dots x_q])$.

1.3.15 Definição

Suponha que φ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ e todas as suas variáveis, livres e ligadas, estão entre $\mathsf{v_0}, \dots, \mathsf{v_q}$.

1. Se φ é $\theta_1 \wedge \theta_2$, então

   $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0 \dots x_q] \quad \iff \quad \mathfrak{A} \models \theta_1[x_0 \dots x_q]$ e $\mathfrak{A} \models \theta_2[x_0 \dots x_q]$

2. Se φ é $\neg\theta$, então

   $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0 \dots x_q] \quad \iff \quad \mathfrak{A} \not\models \theta[x_0 \dots x_q]$

3. Se φ é $(\forall \mathsf{v_i})\, \psi$, onde $i \leqslant q$, então

   $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0 \dots x_q] \quad \iff \quad$ p/ cada $x \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi[x_0 \dots x_{i-1}\ x\ x_{i+1} \dots x_q]$.♦

- Nossa definição 1.3.12 está agora completa. Como um simples exercício o leitor deve verificar que as abreviações $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ têm os seus significados usuais.

- Em particular, se φ é $(\exists \mathsf{v_i})\, \psi$, onde $i \leqslant q$, então

  $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0 \dots x_q] \quad \iff \quad$ existe $x \in A$ / $\mathfrak{A} \models \psi[x_0 \dots x_{i-1}\ x\ x_{i+1} \dots x_q]$.

- Tendo terminado a definição, nossa primeira tarefa é provar a proposição de que a relação

  $$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathsf{v_0} \dots \mathsf{v_p})[x_0 \dots x_q]$$

  depende apenas de $x_0 \dots x_p$, onde $p < q$.

1.3.16 Proposição

1. Seja $\mathsf{t}(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{p})$ um termo e sejam $x_0, \ldots, x_q$ e $y_0, \ldots, y_r$ duas sequências de elementos de A tais que $p \leqslant q, p \leqslant r$ e $x_i = y_i$ sempre que v_i for uma variável de t. Então:

$$\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = \mathsf{t}[y_0 \ldots y_r]$$

2. Seja φ uma fórmula cujas variáveis (livres e ligadas) estão todas entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{p}$, e sejam $x_0, \ldots, x_q$ e $y_0, \ldots, y_r$ duas sequências de elementos de A tais que $p \leqslant q, p \leqslant r$ e $x_i = y_i$ sempre que v_i for uma variável livre de φ. Então:
$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_q]$$

Comentário

- A proposição 1.3.16 mostra que o valor de um termo t para $x_0, \ldots, x_q$ e o fato de se a fórmula φ é satisfeita ou não pela sequência $x_0, \ldots, x_q$ dependem *apenas* dos valores x_i para os quais v_i é uma variável livre; sendo, pois, independentes dos outros valores da sequência, tanto quanto do tamanho da sequência.

- O tamanho q da sequência deve ser grande o suficiente para cobrir todas as variáveis livres e ligadas de t e φ de modo a que as expressões $\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q]$ e $\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q]$ estejam completamente definidas.

- Podemos agora inferir imediatamente que se σ for uma sentença (fórmula sem variável livre), então $\mathfrak{A} \vDash \sigma[x_0 \ldots x_q]$ é completamente independente da sequência $x_0 \ldots x_q$.

- A importância da proposição 1.3.16 é que ela nos permite fazer a seguinte definição.

1.3.17 Definição

1. Seja $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{q})$ uma fórmula em que todas as variáveis livres e ligadas estão entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{p}$, $p \leqslant q$. Seja $x_0, \ldots, x_p$ uma sequência de elementos de A. Dizemos que φ *é satisfeita em* $\mathfrak{A}$ *por* $x_0, \ldots, x_p$,

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_p],$$

se e somente se φ é satisfeita em $\mathfrak{A}$ por $x_0, \ldots, x_p, \ldots, x_q$ para algum (ou, equivalentemente, cada) $x_{p+1}, \ldots, x_q$.

2. Seja φ uma sentença em que todas as variáveis ligadas estão entre $\mathsf{v_0}, \ldots, \mathsf{v_q}$. Dizemos que $\mathfrak{A}$ satisfaz φ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi,$$

se e somente se φ é satisfeita em $\mathfrak{A}$ por alguma (ou, equivalentemente, cada) sequência $x_0, \ldots, x_q$. ♦

- A prova da Proposição 1.3.16 é bem direta, porém tediosa. Faremos um esboço dela como um primeiro exemplo de prova por indução na 'complexidade' das fórmulas. No futuro, frequentemente omitiremos este tipo de provas indutivas.

Prova da Proposição 1.3.16

1. Se $\mathsf{t}(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ for uma variável $\mathsf{v_i}$, então

$$\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = x_i = y_i = t[y_0 \ldots y_r].$$

Se $\mathsf{t}(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ for um símbolo de constante c, e x for a interpretação de c em $\mathfrak{A}$, então

$$\mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] = x = t[y_0 \ldots y_r].$$

Suponha que $\mathsf{t}(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ seja $\mathsf{F}(\mathsf{t_1} \ldots \mathsf{t_m})$, onde F é um símbolo de função m-aria. Por hipótese indutiva a proposição vale para os termos $\mathsf{t_1}, \ldots, \mathsf{t_m}$, ou seja,

$$\mathsf{t_i}[x_0 \ldots x_q] = \mathsf{t_i}[y_0 \ldots y_r], (i = 1, \ldots, m).$$

Portanto, se G for a interpretação de F em $\mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{t}[x_0 \ldots x_q] &= G(\mathsf{t_1}[x_0 \ldots x_q] \ldots \mathsf{t_m}[x_0 \ldots x_q]) \\ &= G(\mathsf{t_1}[y_0 \ldots y_r] \ldots \mathsf{t_m}[y_0 \ldots y_r]) \quad = \quad \mathsf{t}[y_0 \ldots y_r]. \end{aligned}$$

com isso provamos o item (1) para todos os termos t.

2. Se φ for uma fórmula atômica da forma $\mathsf{t_1} \equiv \mathsf{t_2}$, então, usando (1) vemos que

$$\begin{aligned} \mathsf{t_1}[x_0 \ldots x_q] &= \mathsf{t_1}[y_0 \ldots y_r] \\ \mathsf{t_2}[x_0 \ldots x_q] &= \mathsf{t_2}[y_0 \ldots y_r] \end{aligned}$$

Logo, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q],\\ \mathsf{t}_1[x_0 \ldots x_q] = \mathsf{t}_2[x_0 \ldots x_q],\\ \mathsf{t}_1[y_0 \ldots y_r] = \mathsf{t}_2[y_0 \ldots y_r],\\ \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_r].\end{gathered}$$

Seja φ uma fórmula atômica da forma $\mathsf{P}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n})$, onde P é um símbolo de predicado n-ário e $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_\mathsf{n}$ são termos. Então, usando (1), vemos que as seguintes afirmações são equivalentes (onde R é a interpretação de P em $\mathfrak{A}$):

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q],\\ R(\mathsf{t}_1[x_0 \ldots x_q] \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n}[x_0 \ldots x_q]),\\ R(\mathsf{t}_1[y_0 \ldots y_r] \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n}[y_0 \ldots y_r]),\\ \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_r].\end{gathered}$$

Suponha agora que ψ e θ são fórmulas nas quais todas as variáveis livres e ligadas estão entre $\mathsf{v}_0, \ldots, \mathsf{v}_\mathsf{p}$.

Se φ é $\psi \wedge \theta$, pela hipótese de indução (HI) as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q],\\ \mathfrak{A} \vDash \psi[x_0 \ldots x_q] \ \text{ e } \ \mathfrak{A} \vDash \theta[x_0 \ldots x_q],\\ \mathfrak{A} \vDash \psi[y_0 \ldots y_r] \ \text{ e } \ \mathfrak{A} \vDash \theta[y_0 \ldots y_r],\\ \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_r].\end{gathered}$$

Se φ é $\neg\psi$, então por HI as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q],\\ \mathfrak{A} \nvDash \psi[x_0 \ldots x_q],\\ \mathfrak{A} \nvDash \psi[y_0 \ldots y_r],\\ \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_r].\end{gathered}$$

Finalmente, se φ é da forma $(\forall \mathsf{v}_\mathsf{i})\,\psi$, onde $i \leqslant p$. Então também por HI as seguintes afirmações são equivalentes:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A} \vDash \varphi[x_0 \ldots x_q],\\ \text{para todo } \ x \in A, \ \ \mathfrak{A} \vDash \psi[x_0 \ldots x_{i-1}\ x\ x_{i+1} \ldots x_q],\\ \text{para todo } \ y \in A, \ \ \mathfrak{A} \vDash \psi[y_0 \ldots x_{i-1}\ x\ x_{i+1} \ldots x_r],\\ \mathfrak{A} \vDash \varphi[y_0 \ldots y_r].\end{gathered}$$

Neste último caso da prova utilizamos o fato de que as variáveis livres de ψ são exatamente as variáveis livres de φ possivelmente acrescidas de $\mathsf{v_i}$. A prova fica assim completa. ♦

- Vamos apresentar mais uma importante propriedade sobre o comportamento da relação de satisfação diante da substituição de variáveis por termos. Omitiremos a prova que é obtida de modo bastante semelhante à da proposição anterior, por indução na complexidade de fórmulas.

1.3.18 Proposição

Seja $\varphi(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ uma fórmula e seja $\mathsf{t_0}(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p}), \ldots, \mathsf{t_p}(\mathsf{v_0} \ldots \mathsf{v_p})$ termos. Assuma que nenhuma variável que ocorre em qualquer dos termos $\mathsf{t_0}, \ldots, \mathsf{t_p}$ ocorra ligada em φ. Seja $x_0, \ldots, x_p$ uma sequência de elementos de A e seja $\varphi(\mathsf{t_0} \ldots \mathsf{t_p})$ a fórmula obtida de φ através da substituição de cada $\mathsf{v_i}$ por $\mathsf{t_i}$ $(i = 0, \ldots, p)$. Então

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathsf{t_0} \ldots \mathsf{t_p})[x_0 \ldots x_p] \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{t_0}[x_0 \ldots x_p] \ldots \mathsf{t_p}[x_0 \ldots x_p]]. \ \blacklozenge$$

- Esta proposição será especialmente útil no caso simples em que os termos $\mathsf{t_0}, \ldots, \mathsf{t_p}$ são símbolos de constante $\mathsf{c_0}, \ldots, \mathsf{c_p}$ cujas interpretações em $\mathfrak{A}$ são $a_0, \ldots, a_p$. Neste caso, $\varphi(\mathsf{c_0} \ldots \mathsf{c_p})$ é uma sentença, e a proposição mostra que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathsf{c_0} \ldots \mathsf{c_p}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a_0 \ldots a_p]$$

- Finalmente completamos o projeto iniciado várias páginas antes. Nomeadamente, dizemos que uma sentença

  σ *é verdadeira em* $\mathfrak{A}$

  se e somente se

  $\mathfrak{A} \models \sigma[x_0 \ldots x_q]$ para alguma (ou toda) sequência $x_0, \ldots, x_q$ em $\mathfrak{A}$

- Usaremos a notação especial $\mathfrak{A} \models \sigma$ para denotar que σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Todas as frases abaixo são equivalentes a σ *é verdadeira em* $\mathfrak{A}$:

$$\sigma \text{ se cumpre em } \mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{A} \text{ satisfaz } \sigma;$$
$$\sigma \text{ é satisfeita em } \mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{A} \text{ é um modelo de } \sigma.$$

- Quando σ *não se cumpre em* $\mathfrak{A}$, dizemos que σ *é falsa em* $\mathfrak{A}$ ou que σ *falha em* $\mathfrak{A}$, ou que $\mathfrak{A}$ *é modelo de* $\neg\sigma$.

- Dado um conjunto Σ de sentenças, dizemos que $\mathfrak{A}$ é um modelo de Σ se e somente se $\mathfrak{A}$ for um modelo de cada σ em Σ. É conveniente usar a notação $\mathfrak{A} \models \Sigma$ para esta noção.

- Uma sentença σ que se cumpre em qualquer modelo para a linguagem $\mathcal{L}$ é chamada de *válida*.

- Uma sentença ou conjunto de sentença é *satisfazível* se e somente se tiver pelo menos um modelo.

- $\models \sigma$ denota que σ é uma sentença válida.

- Uma sentença φ é consequência de outra sentença σ, em símbolos $\sigma \models \varphi$, se e somente se todo modelo de σ é também modelo de φ.

- Uma sentença φ é consequência de um conjunto de sentenças Σ, em símbolos $\Sigma \models \varphi$, se e somente se todo modelo de Σ for modelo de φ. Disso se segue que

$$\Sigma \cup \{\sigma\} \models \varphi \quad \text{se e somente se} \quad \Sigma \models \sigma \to \varphi.$$

- Dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ para $\mathcal{L}$ são elementarmente equivalentes se e somente se toda sentença que é verdadeira em $\mathfrak{A}$ é verdadeira em $\mathfrak{B}$ e vice-versa. Expressaremos esta relação entre modelos por $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

- É fácil verificar que $\equiv$ é, de fato, uma relação de equivalência.

- Note que o símbolo que escolhemos para denotar equivalência elementar entre modelos é o mesmo que utilizamos para a relação de identidade na linguagem $\mathcal{L}$. Mas não é possível haver confusão aqui, pois em um caso temos uma relação entre modelos para $\mathcal{L}$ e no outro uma relação entre termos de $\mathcal{L}$.

1.3.19 Proposição

Se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. No caso de $\mathfrak{A}$ ser finito, então o inverso também é verdadeiro. ♦

- Terminaremos esta seção apresentando três importantes resultados sem prova, mas cujas provas serão dadas no próximo capítulo.

1.3.20 Teorema – Completude

Dada uma sentença σ, σ é um teorema de $\mathcal{L}$ se e somente se σ é válido.

1.3.21 Teorema – Completude Estendida

Seja Σ um conjunto qualquer de sentenças. Então Σ é consistente se e somente se Σ tem modelo.

1.3.22 Teorema – Compacidade

Um conjunto de sentenças Σ tem modelo se e somente se todo subconjunto finito de Σ tem modelo. ♦

- Concluímos esta seção com uma tabela de noções equivalentes:

Sintaxe	**Semântica**
φ é um teorema ($\vdash \varphi$)	φ é válida ($\models \varphi$)
Σ é consistente	Σ tem modelo
φ é deduzível a partir de Σ ($\Sigma \vdash \varphi$)	φ é consequência de Σ ($\Sigma \models \varphi$)

Exercícios – Para Entregar

Resolva os seguintes exercícios do livro (Chang-Keisler – pp 33-36)

1.3.2 – 1.3.4 – 1.3.5 – 1.3.9 – 1.3.19

1.4 Teorias e Exemplos de Teorias

- Uma *teoria (de primeira ordem)* T de $\mathcal{L}$ é uma coleção de sentenças de $\mathcal{L}$.

- T é dita *fechada* se e somente se T é fechada segundo a relação $\vDash$. Ou seja: $T \vDash \varphi \Longrightarrow \varphi \in T$.

- Como teorias são simplesmente conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$, podemos usar as seguintes expressões introduzidas na seção anterior:

  – modelo de uma teoria,

  – teoria consistente,

  – teoria satisfatível.

- Uma teoria T é *completa* (em $\mathcal{L}$) se e somente se o conjunto de suas consequências for consistente maximal.

- Se T é uma teoria de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$, então T não é uma teoria fechada de $\mathcal{L}'$.

- Por outro lado, é fácil ver que se $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, então a *restrição de uma teoria fechada* T a $\mathcal{L}$, em símbolos $T \,|\, \mathcal{L}$, sempre será uma teoria fechada de $\mathcal{L}$.

- T é uma *subteoria* de T' se e somente se $T \subset T'$. Se T é uma subteoria de T', então T' é uma *extensão* de T.

- Um *conjunto de axiomas* de uma teoria T é um conjunto de sentenças com as mesmas consequências que T.

- Claramente, T é um conjunto de axiomas de T, e o conjunto vazio é um conjunto de axiomas de T se e somente se T for um conjunto de sentenças válidas de $\mathcal{L}$.

- Por definição, Σ é um conjunto de axiomas para a teoria fechada definida por $T = \{\varphi \colon \Sigma \vDash \varphi\}$.

- Uma teoria T é *finitamente axiomatizável* se tiver um conjunto de axiomas finito.

- A maneira mais conveniente e padrão de apresentar uma teoria T é listando um conjunto finito ou infinito de axiomas para ela.

- Uma outra forma de apresentar uma teoria é a seguinte: Seja $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathcal{L}$; então a teoria de $\mathfrak{A}$ é o conjunto de todas as sentenças que se cumprem em $\mathfrak{A}$.

- A teoria de qualquer modelo $\mathfrak{A}$ é obviamente uma teoria completa.

- Historicamente, a importância das teorias cresceu a partir dos seguintes dois fatos:

  - Uma vez que os axiomas de uma teoria estão dados, então usando a relação $\vdash$ podemos encontrar, de uma maneira sintática, todas as consequências de T.
  - Por outro lado, utilizando a relação de satisfação, podemos estudar todos os modelos de T.

- Devido ao teorema da completude estendida, estas duas abordagens nos dão, basicamente, os mesmos resultados a respeito das consequências de T. No entanto, devido ao fato de os modelos de T também possuirem propriedades não exprimíveis em primeira ordem, tais como isomorfismo, submodelos, extensões e muitas outras, a segunda abordagem nos conduz ao que hoje conhecemos como teoria de modelos.

- No restante desta seção apresentaremos alguns exemplos de teorias e seus modelos para mostrar a íntima conexão que a teoria de modelos tem com outros ramos da matemática. Em cada exemplo descreveremos, através de um conjunto de axiomas, uma teoria fechada. Alguns resultados clássicos serão enunciados sem prova.

1.4.1 Definição – Teoria das Ordens Parciais

Seja $\mathcal{L} = \{\leqslant\}$. A teoria das *ordens parciais* tem três axiomas:

1. $(\forall \mathsf{xyz})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} \leqslant \mathsf{z} \to \mathsf{x} \leqslant \mathsf{z})$,

2. $(\forall \mathsf{xy})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} \leqslant \mathsf{x} \to \mathsf{x} \equiv \mathsf{y})$,

3. $(\forall \mathsf{x})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{x})$. ⧫

- Estes axiomas são, respectivamente, as propriedades da transitividade, antissimetria e reflexividade das ordens parciais.

- Qualquer modelo $\langle A, \leqslant \rangle$ desta teoria consiste de um conjunto não vazio A e uma relação de ordem parcial $\leqslant$ em A.
- Se adicionarmos o axioma da comparitividade

  4. $(\forall \mathsf{xy})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \vee \mathsf{y} \leqslant \mathsf{x})$,

  obtemos a teoria das *ordens simples* (também chamadas de *ordens lineares*).
- Um modelo $\langle A, \leqslant \rangle$ desta teoria é um conjunto linearmente ordenado.
- Adicionando mais dois axiomas (onde abreviamos $\neg(x \equiv y)$ por $x \not\equiv y$):

  5. $(\forall \mathsf{xy})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{x} \not\equiv \mathsf{y} \rightarrow (\exists \mathsf{z})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{z} \wedge \mathsf{z} \not\equiv \mathsf{x} \wedge \mathsf{z} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{z} \not\equiv \mathsf{y}))$,
  6. $(\exists \mathsf{xy})\,(\mathsf{x} \not\equiv \mathsf{y})$,

  obtemos a teoria das *ordens (simples) densas*. Os números racionais com o $\leqslant$ usual é um exemplo de um modelo desta teoria. A teoria das ordens densas não tem modelos finitos.
- Se quisermos considerar apenas as *ordens densas ilimitadas*, então adicionamos os axiomas:

  7. $(\forall \mathsf{x})\,(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{x} \not\equiv \mathsf{y})$,
  8. $(\forall \mathsf{x})\,(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{y} \leqslant \mathsf{x} \wedge \mathsf{x} \not\equiv \mathsf{y})$,

1.4.2 Proposição

Quaisquer dois modelos enumeráveis da teoria das ordens densas ilimitadas são isomórficos. ♦

1.4.3 Exemplo – Álgebras de Boole

Seja $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}$, onde $+$ e $\cdot$ são símbolos de de função binária, $-$ é símbolo de função unária e $\mathsf{0}$ e $\mathsf{1}$ são símbolos de constate. A teoria das álgebras booleanas tem os seguintes axiomas (nos quais estamos assumindo que todas as variáveis livres estão universalmente quantificadas).

1. Associatividade de $+$ e $\cdot$

$$\mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} + \mathsf{y}) + \mathsf{z} \qquad \mathsf{x} \cdot (\mathsf{y} \cdot \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) \cdot \mathsf{z}$$

2. Comutatividade de $+$ e $\cdot$

$$\mathsf{x} + \mathsf{y} \equiv \mathsf{y} + \mathsf{x} \qquad \mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \equiv \mathsf{y} \cdot \mathsf{x}$$

3. Leis de Idempotência

$$\mathsf{x} + \mathsf{x} \equiv \mathsf{x} \qquad \mathsf{x} \cdot \mathsf{x} \equiv \mathsf{x}$$

4. Leis da Distributividade

$$\mathsf{x} + (\mathsf{y} \cdot \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} + \mathsf{y}) \cdot (\mathsf{x} + \mathsf{z}) \qquad \mathsf{x} \cdot (\mathsf{y} + \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) + (\mathsf{x} \cdot \mathsf{z})$$

5. Leis de Absorção

$$\mathsf{x} + (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) \equiv \mathsf{x} \qquad \mathsf{x} \cdot (\mathsf{x} + \mathsf{y}) \equiv \mathsf{x}$$

6. Leis de DeMorgan

$$\overline{\mathsf{x} + \mathsf{y}} \equiv \overline{\mathsf{x}} \cdot \overline{\mathsf{y}} \qquad \overline{\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}} \equiv \overline{\mathsf{x}} + \overline{\mathsf{y}}$$

7. Leis do Zero e do Um

$$\begin{array}{ll} \mathsf{x} + 0 \equiv \mathsf{x} & \mathsf{x} \cdot 0 \equiv 0 \\ \mathsf{x} + 1 \equiv 1 & \mathsf{x} \cdot 1 \equiv \mathsf{x} \\ 0 \not\equiv 1 & \\ \mathsf{x} + \overline{\mathsf{x}} \equiv 1 & \mathsf{x} \cdot \overline{\mathsf{x}} \equiv 0 \end{array}$$

8. Lei da Dupla Negação

$$\overline{\overline{\mathsf{x}}} \equiv \mathsf{x}$$

- Um modelo $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ desta teoria é chamado de álgebra de boole. Estritamente falando, deveríamos escrever $+_{\mathfrak{A}}, \cdot_{\mathfrak{A}}, -_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{A}}$ no modelo acima, mas seguindo nossa convenção, omitiremos os subíndices sempre que possível.

- Uma ordem parcial pode ser definida em A por:

$$x \leqslant y \text{ se e somente se } x + y = y.$$

- Pode-se provar que $\leqslant$ tem um elemento mínimo, nomeadamente 0, um elemento máximo, nomeadamente 1, e dados dois elementos $x, y \in A$, o menor limitante superior (*least upper bound – l.u.b.*) de x e y é $x+y$, e o maior limitante inferior (*greatest lower bound – g.l.b.*) de x e y é $x \cdot y$.

- Um *campo de conjuntos* S é uma coleção de subconjuntos de um conjunto não vazio X tal que:
  - O conjunto vazio $\varnothing$ e X, ambos estão em S.
  - S é fechado segundo as operações de $\cup$, $\cap$ e $-$ (complemento com respeito a X).

- É fácil ver que se S é um campo de conjuntos, então, $\langle S, \cup, \cap, -, \varnothing, X\rangle$ é uma álgebra de boole. Conversamente, temos:

1.4.4 Proposição – Teorema da Representação para Álgebras de Boole

Toda álgebra de boole é isomórfica a um campo de conjuntos. ♦

- Um *átomo* de uma álgebra de boole é uma elemento $x \neq 0$ tal que não há elemento y entre 0 e x. Isto é, não existe y tal que $0 \leqslant y \leqslant x, 0 \neq y, y \neq x$.

- Uma álgebra de boole é *atômica* se e somente se para todo elemento x diferente de 0 há um átomo y tal que $y \leqslant x$.

- Uma álgebra de boole é *sem átomos* (atomless) se e somente se ela não tem átomos.

- Há álgebras de boole que não são nem atômicas nem sem átomos.

- Adicionando-se o seguinte axioma, onde abrevia-se $x+y \equiv y$ por $x \leqslant y$,

  $$(\forall \mathsf{x})\,(0 \not\equiv \mathsf{x} \rightarrow (\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{y} \leqslant \mathsf{x} \wedge 0 \not\equiv \mathsf{y} \wedge (\forall \mathsf{z})\,(\mathsf{z} \leqslant \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{z} \equiv 0 \vee \mathsf{z} \equiv \mathsf{y})))$$

  obtem-se a teoria das *álgebras de boole atômicas*.

- Ao passo que se adicionarmos o seguinte aximoa

$$\neg(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{0} \not\equiv \mathsf{y} \wedge (\forall \mathsf{z})\,(\mathsf{z} \leqslant \mathsf{y} \to \mathsf{z} \equiv \mathsf{0} \vee \mathsf{z} \equiv \mathsf{y}))$$

  obtemos a teoria das *álgebras de boole sem átomos*.

1.4.5 Proposição

Quaisquer duas álgebras de boole sem átomos enumeráveis são isomórficas.

1.4.6 Exemplo – Grupos

- Seja $\mathcal{L} = \{+, \mathsf{0}\}$, onde $+$ é um símbolo de função binária e $\mathsf{0}$ é um símbolo de constante. A teoria dos *grupos* tem os seguintes axiomas (nos quais assumimos, conforme o padrão, que todas as variáveis livres estão quantificadas universalmente):

  1. $\mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} + \mathsf{y}) + \mathsf{z}$ (associatividade)
  2. $\mathsf{x} + \mathsf{0} \equiv \mathsf{x}, \qquad \mathsf{0} + \mathsf{x} \equiv \mathsf{x}$ (identidade)
  3. $(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{x} + \mathsf{y} \equiv \mathsf{0} \wedge \mathsf{y} + \mathsf{x} \equiv \mathsf{0})$ (existênicia de inverso) ♦

- Um modelo $\langle G, +, 0\rangle$ desta teoria é um *grupo*.

- Obtemos a teoria dos *grupos abelianos* quando adicionamos o seguinte axioma:

  4. $\mathsf{x} + \mathsf{y} \equiv \mathsf{y} + \mathsf{x}$ (comutatividade)

- A *ordem* de um elemento x de um grupo é o menor n tal que

$$x + x + \ldots + x \text{ (n vezes)} = 0.$$

- Se não existe tal n, a ordem de x é infinita.

- Para um $n \geqslant 1$ fixo, a expressão nx é uma abreviação para

$$\mathsf{x} + (\mathsf{x} + (\ldots(\mathsf{x} + \mathsf{x})\ldots)) \qquad n \text{ vezes}$$

- Suponha que p é um número primo. A teoria dos *grupos abelianos com todos os elementos de ordem p* tem o seguinte axioma extra:

  5. $\mathsf{px} \equiv \mathsf{0}$ (ordem p)

1.4.7 Proposição

Quaisquer dois modelos da mesma potência para a teoria dos grupos abelianos com todos os elementos de ordem p são isomórficos. ⧫

- Para obter a teoria dos *grupos abelianos com todos os elementos de ordem* ∞ *(livres de torsão)* nós precisamos de uma lista infinita de axiomas: para cada $n \geqslant 1$ adicionamos o axioma

  6. $\mathsf{x} \not\equiv \mathsf{0} \to \mathsf{nx} \not\equiv \mathsf{0}$ (ordem ∞) [um axioma para cada n]

- Esta teoria é o nosso primeiro exemplo de uma teoria não finitamente axiomatizável.

- Se adicionarmos mais uma lista infinita de axiomas, um para cada $n \geqslant 1$

  7. $(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{ny} \equiv \mathsf{x})$ (divisibilidade) [um para cada n]

  obtemos a teoria dos *grupos abelianos divisíveis livres de torsão.*

1.4.8 Proposição

Quaisquer dois grupos abelianos divisíveis livres de torsão da mesma potência são isomórficos. Há uma quantidade enumerável de grupos deste tipo com potência enumerável e que não são isomórficos.

1.4.9 Exemplo – Anéis Comutativos

- Seja $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}$, onde $+$ e $\cdot$ são símbolos de função binária e $\mathsf{0}$ e $\mathsf{1}$ são símbolos de constante. A teoria dos *anéis comutativos (com unidade)* tem os axiomas (1)–(4) listados acima acrescidos dos axiomas (8)–(11) abaixo:

  8. $\mathsf{1} \cdot \mathsf{x} \equiv \mathsf{x} \wedge \mathsf{x} \cdot \mathsf{1} \equiv \mathsf{x}$ (1 é uma unidade)
  9. $\mathsf{x} \cdot (\mathsf{y} \cdot \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) \cdot \mathsf{z}$ (associatividade de $\cdot$)
  10. $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \equiv \mathsf{y} \cdot \mathsf{x}$ (comutatividade de $\cdot$)
  11. $\mathsf{x} \cdot (\mathsf{y} + \mathsf{z}) \equiv (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) + (\mathsf{x} \cdot \mathsf{z})$ (distributividade de $\cdot$ sobre $+$)

- Adicionando mais um axioma

  12. $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \equiv \mathsf{0} \to \mathsf{x} \equiv \mathsf{0} \vee \mathsf{y} \equiv \mathsf{0}$ (divisores não nulos)

obtemos a teoria dos *domínios integrais*. Adicionando mais dois axiomas

13. $\mathsf{0} \not\equiv \mathsf{1}$
14. $\mathsf{x} \not\equiv \mathsf{0} \to (\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{y} \cdot \mathsf{x} \equiv \mathsf{1})$ (existência de inverso multiplicativo)

obtemos a importante teoria dos *campos*. Se para um número primo fixo p adicionarmos o axioma

15. $\mathsf{p1} \equiv \mathsf{0}$

obtemos a teoria dos *campos com característica p*. Por outro lado, se adicionarmos para cada número primo p a negação de (15), nomeadamente

16. $\mathsf{p1} \not\equiv \mathsf{0}$ [um para cada p]

obtemos a teoria dos *campos com característica zero*.

- Introduzimos a expressão x^{n} como uma areviação para

$$\mathsf{x} \cdot (\mathsf{x} \cdot (\ldots (\mathsf{x} \cdot \mathsf{x}) \ldots)) \qquad n \text{ vezes}$$

- A lista infinita de axiomas, um para cada $n \geqslant 1$

17. $(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{x_n} \cdot \mathsf{y^n} + \mathsf{x_{n-1}} \cdot \mathsf{y^{n-1}} + \ldots + \mathsf{x_1} \cdot \mathsf{y} + \mathsf{x_0} \equiv \mathsf{0}) \vee \mathsf{x_n} \equiv \mathsf{0}$

quando adicionada à teoria dos campos (1–4, 8–14) resulta na teoria dos *campos algebricamente fechados*.

1.4.10 Proposição

Quaisquer dois campos algebricamente fechados não enumeráveis de mesmas característica e potência são isomórficos. ⧫

- Cada um dos axiomas (17), para cada n, diz que todo polinômio de grau n tem uma raiz.

- A teoria dos *campos fechados reais* tem todos os axiomas da teoria dos campos mais o axioma

18. $(\forall \mathsf{x})\,(\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{y}^2 \equiv \mathsf{x} \vee \mathsf{y}^2 + \mathsf{x} \equiv \mathsf{0})$

e mais duas listas infinitas de axiomas. Uma é a lista infinita dos axiomas (17) restrita aos n ímpares, e a outra é a lista infinita que diz que $\mathsf{0}$ não é a soma de quadrados não triviais:

19. $\mathsf{x}_0^2 + \mathsf{x}_1^2 + \ldots + \mathsf{x}_n^2 \equiv \mathsf{0} \rightarrow \mathsf{x}_0 \equiv \mathsf{0} \wedge \mathsf{x}_1 \equiv \mathsf{0} \wedge \ldots \wedge \mathsf{x}_n \equiv \mathsf{0}$

- A teoria dos *campos ordenados* é formulada na linguagem de $\mathcal{L} = \{\leqslant, +, \cdot, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}$. Ela tem todos os axiomas da teoria dos campos, todos os da teoria das ordens lineares e mais os seguintes axiomas:

  $\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{x} + \mathsf{z} \leqslant \mathsf{y} + \mathsf{z}$

  $\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \wedge \mathsf{0} \leqslant \mathsf{z} \rightarrow \mathsf{x} \cdot \mathsf{z} \leqslant \mathsf{y} \cdot \mathsf{z}$

  Os campos ordenados dos números racionais e dos números reais são exemplos de modelos desta teoria.

- Dos exemplos que temos discutido até agora, os seguintes são teorias completas:

  - ordens densas ilimitadas
  - álgebras de boole sem átomos
  - grupos abelianos infinitos com todos os elementos de ordem p
  - grupos abelianos divisíveis livres de torsão
  - campos algebricamente fechados de uma dada característica
  - campos reais fechados

- As várias proposições apresentadas mostram que cada uma destas teorias completas, exceto a última, compartilham a propriedade incomum de que para algumas (algumas vezes todas) potências infinitas todos os modelos da teoria destas potências são isomórficos.

1.4.11 Exemplo – Aritmética de Peano

- Seja $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \mathsf{S}, \mathsf{0}\}$, onde $+$ e $\cdot$ são símbolos de função binária, S é símbolo de função unária (chamada de função sucessor), e $\mathsf{0}$ é um símbolo de constante. A *teoria dos números* (ou *aritmética de Peano*) tem os seguintes axiomas:

  1. $\mathsf{0} \not\equiv \mathsf{Sx}$ ($\mathsf{0}$ não tem sucessor)

2. $\mathsf{Sx} \equiv \mathsf{Sy} \to \mathsf{x} \equiv \mathsf{y}$
3. $\mathsf{x} + 0 \equiv \mathsf{x}$
4. $\mathsf{x} + \mathsf{Sy} \equiv \mathsf{S}(\mathsf{x} + \mathsf{y})$
5. $\mathsf{x} \cdot 0 \equiv 0$
6. $\mathsf{x} \cdot \mathsf{Sy} \equiv (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) + \mathsf{x}$

e finalmente, para cada fórmula $\varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$ de $\mathcal{L}$, onde v_0 não ocorre ligada em φ, o axioma

7. $\varphi(0\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}) \wedge (\forall \mathsf{v}_0)\, (\varphi(\mathsf{v}_0\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n}) \to \varphi(\mathsf{S}\mathsf{v}_0\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})) \to (\forall \mathsf{v}_0)\, \varphi(\mathsf{v}_0 \ldots \mathsf{v}_\mathsf{n})$

- Os axiomas (3) e (4) correspondem à definição recursiva usual de $+$ em termos de $\mathsf{0}$ e S, e os axiomas (5) e (6) correspondem à definição recursiva de $\cdot$ em termos de $\mathsf{0}$, S e $+$. A lista completa das instâncias de (7), uma para cada φ, é chamada de *esquema de axiomas da indução.*

- O *modelo standard* da teoria dos números é $\langle \omega, +, \cdot, S, 0 \rangle$, onde S é a função sucessor e $+, \cdot,)$ têm seus significados usuais. Todos os outros modelos da teoria dos números não isomórficos a este são chamados de *não-standard*.

- A *Teoria dos números completa* (ou *aritmética completa*) é o conjunto de todas as sentenças φ de $\mathcal{L}$ que são verdadeiras no modelo standard.

- Há muitos resultados profundos sobre a teoria dos números:

- O teorema da incompletude de Gödel(1931) estabelece que a teoria dos números não é completa; portanto, a teoria dos números completa, definida acima, é uma extensão própria da teoria dos números.

- Nenhuma extensão finita (ou seja, obtida pelo acréscimo de um número finito de novos axiomas) da teoria dos números é completa. Então a teoria completa dos números não é finitamente axiomatizável sobre a teoria dos números e, portanto, certamente não é finitamente axiomatizável.

- A própria teoria dos números (a aritmética de Peano) não é finitamente axiomatizável. Isto foi demonstrado por Ryll-Nardzewski(1952), através do uso de modelos não-standard.

- A existência de modelos não-satandard da teoria dos números completa foi primeiro comprovada por Skolem(1934).

- Mencionaremos algumas interessantes subteorias da teoria dos números. Por exemplo, se o esquema de axiomas da indução (7) for substituído pelo seguinte axioma único

  8. $(\forall \mathsf{x})\,(\mathsf{x} \not\equiv \mathsf{0} \rightarrow (\exists \mathsf{y})\,(\mathsf{x} \equiv \mathsf{Sy}))$

  nós obtemos uma subteoria finitamente axiomatizável da teoria dos números (A teoria Q de Tarski, Mostowski e Robinson, 1953) que é incompleta, e para a qual não há extensão finita que seja completa.

- Na linguagem $\mathcal{L}' = \{\mathsf{S}, \mathsf{0}\}$ obtida deixando de fora os símbolos $+$ e $\cdot$, a subteoria dos números dada pleos axiomas (1), (2) e pelo esquema (7), restrita, é claro, às fórmulas de $\mathcal{L}'$, é completa. Apesar disso, ela não é finitamente axiomatizável, conforme pode ser demonstrado com o uso do teorema da compacidade.

- Na linguagem $\mathcal{L}'' = \{+, \mathsf{S}, \mathsf{0}\}$, os axiomas (1)–(4) e o esquema (7), novamente restritos às fórmulas de $\mathcal{L}''$, resultam na *teoria aditiva dos números* (ou *aritmética de Pressburger*). Esta teoria não é finitamente axiomatizável, mas é completa (Presburger, 1929). A completude da teoria de $\mathcal{L}'$ descrita no item anterior se segue desta prova de Presburger.

1.4.12 Exemplo – Algumas Teorias de Conjuntos

- Há duas razões bastante distintas para discutirmos teorias de conjuntos neste livro sobre teoria de modelos. A primeira é que se queremos ser completamente precisos, devemos formulas todo o nosso tratamento da teoria de modelos dentro de um sistema apropriado da teoria de conjuntos.

- Na verdade, estamos adotando a abordagem mais prática de formular nossos modelos em uma teoria dos conjuntos informal. Mas é importante que, em princípio, possamos fazer tudo o que temos feito em uma teoria de conjuntos axiomática. Deixamos para o Apêncice um esboçodesta teoria de conjuntos informal que estamos utilizando.

- A outra razão para discutirmos teorias de conjuntos é que elas estão entre os mais interessantes e importantes exemplos de teorias. É esta segunda razão que nos motiva a desenvolver este exemplo.

- A teoria de modelos é particularmente adequada para estudarmos os modelos da teoria dos conjuntos. Listamos, no Apêndice, os axiomas para quatro das teorias de conjunto mais familiares: Zermelo, Zermelo-Fraenkel, Bernays e Bernays-Morse.

- As duas primeiras são formuladas na linguagem $\mathcal{L} = \{\in\}$, enquanto que as duas últimas são formuladas na linguagem $\mathcal{L} = \{\in, \mathsf{V}\}$, onde $\in$ é um símbolo de relação binária e V é um símbolo de relação unária (símbolo de propriedade). A teoria de conjuntos de Zermelo é uma subteoria da teoria de Zermelo-Fraenkel, e a teoria de Bernays é subteoria da de Bernays-Morse.

- Os resultados mais profundos em teoria de conjuntos utilizam os métodos de construções de modelos. No entanto estas construções são frequentemente de uma natureza especial, para modelos da teoria dos conjuntos apenas, e portanto, estão fora do escopo deste livro.

- Por exemplo, a noção de conjuntos construtíveis foi utilizada por Gödel (1939) para mostrar que se a teoria de conjuntos de Bernays é consistente, então a adição do axioma da escolha e da hipótese do contínuo generalizada a ela resulta em uma teoria também consistente. Em outras palavras. Se a teoria dos conjuntos de Bernays tem um modelo, então ela também tem um modelo no qual o axioma da escolha e a hipótese do contínuo generalizada são verdadeiros.

- Estes mesmos resultados, sabemos, são também válidos para a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

- O método de construção por forcing de Cohen tem sido usado na obtenção de importantes resultados de consistência. Por exemplo, se a teoria de conjuntos de Bernays (ou a de Zermelo-Fraenkel) tiver um modelo, então ela tem um modelo no qual o axioma da escolha é falso, e tem também outro modelo no qual o axioma da escolha é verdadeiro, mas a hipótese do contínuo generalizada é falsa.

- No restante de nossa discussão usaremos a abreviação ZF para a 'teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel'. Se podemos ou não provar que ZF é consistente depende de quanto estamos assuindo ou não em nossa teoria dos conjuntos intuitiva.

- Se nossa teoria dos conjuntos intuitiva for apenas uma réplica de ZF, então não poderemos provar a consistência de ZF, mesmo se permitirmos o uso do axioma da escolha. Similarmente, para quaisquer das outras teorias de conjuntos T que introduzimos no Apêncice, não podemos provar a consistência de T se nossa teoria dos conjuntos intuitiva for uma réplica de T.

- Estas afirmações são consequências do teorema da incompletude de Gödel.

- Por outro lado, na teoria de conjuntos de Bernays-Morse, podemos provar a consistência da teoria de conjuntos de Beranys e da de ZF. Em ZF podemos provar a consistência da teoria de conjuntos de Zermelo.

- Se assumirmos a existência de um cardinal inacessível, então podemos provar que tanto ZF quanto a teoria de conjuntos de Bernays são consistentes.

- As teorias ZF e de Bernays são muito próximas uma da outra. Podemos provar que uma delas é consistente se e somente se a outra também for.

- As teorias de conjuntos de Zermelo, ZF e Bernays-Morse não são finitamente axiomatizáveis, mas surpreendentemente a teoria de Bernays é (Bernays, 1937). Com essa axiomatização finita ela é muitas vezes chamada de teoria de Bernays-Gödel.

- Todas estas 4 teorias de conjuntos, assim como a teoria dos números, têm a seguinte propriedade:

  - Se a teoria for consistente, então ela não é completa e nenhuma de suas extensões finitas é completa.

- Esta é mais uma consequência do teorema da incompletude de Godel.

- Não há nenhuma noção completamente satisfatória de um modelo 'standard' para a teoria dos conjuntos. O mais próximo que nos aproximamos disso é através da noção de *modelo natural*. Modelos naturais, grosseiramente, são modelos da forma $\langle M, \in \rangle$, onde M é um conjunto de conjuntos formado partindo-se de um conjunto vazio e repetindo-se as operações de união e conjunto potência, enquanto que $\in$ é a $\in$-relação restrita a M.

- Mais precisamente, tomando $S(X)$ como o conjunto potência do conjunto X, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de X, definimos para cada ordinal α o conjunto $R(\alpha)$ por

$$R(0) = 0$$
$$R(\alpha + 1) = S(R(\alpha))$$
$$R(\alpha) = \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta) \qquad \text{se } \alpha \text{ for um ordinal limite}$$

  Então um modelo natural para ZF é um modelo da forma $\langle R(\alpha), \in \rangle$ e um modelo natural para a teoria de conjuntos de Bernays é um modelo da forma $\langle R(\alpha+1), \in, R(\alpha) \rangle$.

- Nenhuma de nossas teorias de conjuntos tem modelos enumeráveis. Por esta razão, uma noção mais fraca de modelo 'standard' também é importante. Um modelo $\langle M, \in \rangle$ é dito ser *transitivo* se e somente se $\in$ é a $\in$-relação restrita a M e todo elemento de um elemento de M é um elemento de M.

- Para modelos da linguagem $\mathcal{L}' = \{\in, \mathsf{V}\}$ fazemos uma definição similar. Os modelos enumeráveis transitivos são os modelos mais importantes do método de Cohen de construção por forcing.

- Uma vez que a teoria dos números tem apenas um modelo 'standard' e não é completa, ela tem extensões consistentes que têm modelos standards.

- Se ZF tiver algum modelo transitivo, então terá muitos modelos transitivos não equivalentes. Apesar disso, se ZF for consistente, então tem extensões consistentes que não têm modelos transitivos. Além disso, nem em ZF acrescida do axioma da escolha é possível provar que: se ZF tem um modelo, então ZF tem um modelo transitivo.

Exercícios para Entregar

1.4.6 – 1.4.8 – 1.4.9 – 1.4.10

2 Modelos Construídos a Partir de Constantes

2.1 Completude e Compacidade

- Nesta seção provaremos o teorema da completude, cuja primeira prova é de Gödel(1930). A prova que apresentaremos é devida a Henkin(1949) e aplica-se a situações um pouco mais gerais do que as da prova original de Gödel.[1]
- O resultado que provaremos é o de que todo conjunto de sentenças consistente T em uma linguagem $\mathcal{L}$ tem um modelo ou, em outras palavras, é satisfatível.
- A prova se dá em dois estágios. Primeiro provaremos que T pode ser estendido para um conjunto consistente de sentenças $\overline{T}$ em uma linguagem expandida $\overline{\mathcal{L}}$ com determinadas características desejáveis. Então provaremos que todo T com estas características desejadas tem um modelo. A ordem na qual estas duas partes são efetuadas é irrelevante.

Definição – Conjunto de Testemunhas

Seja T um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$ e seja C um conjunto de símbolos de constante de $\mathcal{L}$. (C pode ser um subconjunto próprio do conjunto de todos os símbolos de constante de $\mathcal{L}$.) Dizemos que C é um *conjunto de testemunhas* para T em $\mathcal{L}$ se e somente se para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ com no máximo uma variável livre, digamos x, há uma constante $\mathsf{c} \in C$ tal que

$$T \vdash (\exists \mathsf{x})\, \varphi \to \varphi(\mathsf{c}) \ \blacklozenge$$

- Dizemos que T tem testemunhas em $\mathcal{L}$ se e somente se T tem algum conjunto de testemunhas C em $\mathcal{L}$.

[1] Gödel provou o teorema da completude e nós provaremos o teorema da completude estendida.

- O significado da notação $\varphi(\mathsf{c})$ deve ficar bastante claro aqui e no restante deste capítulo: $\varphi(\mathsf{c})$ é obtido de φ através da substituição simultânea de todas as ocorrências livres de x em φ pela constante c.

- Note que a notação $\varphi(\mathsf{c})$ pode ser ambígua. Por exemplo, se φ é uma fórmula com as variáveis livres x e y, teremos que indicar se $\varphi(\mathsf{c})$ é obtida de φ através da substituição das ocorrências livres de x por c ou da substituição das ocorrências livres de y por c.

- Uma notação alternativa completamente livre de ambiguidade seria escrever $\varphi(\mathsf{c}/\mathsf{x})$ para a fórmula obtida através da substituilão de todas as ocorrências livres de x em φ por c. No entanto, preferimos usar $\varphi(\mathsf{c})$, e confiar no contexto para esclarecer supostas ambiguidades, a usar a notação mais "carregada" $\varphi(\mathsf{c}/\mathsf{x})$.

2.1.1 Lema

Seja T um conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}$. Seja C um conjunto de símbolos novos de constante cuja potência $|C| = \|\mathcal{L}\|$, e seja $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup C$ a expansão simples de $\mathcal{L}$ obtida pela adição das constantes de C. Então T pode ser estendido a um conjunto consistente de sentenças $\overline{T}$ em $\overline{\mathcal{L}}$ para o qual C é o conjunto de testemunhas em $\overline{\mathcal{L}}$.

Prova

- Seja $\alpha = \|\mathcal{L}\|$. Para cada $\beta < \alpha$, seja c_β um símbolo de constante que não ocorre em $\mathcal{L}$ e tal que $\mathsf{c}_\beta \neq \mathsf{c}_\gamma$ se $\beta < \gamma < \alpha$. Seja $C = \{\mathsf{c}_\beta : \beta < \alpha\}$ e $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup C$.

- Claramente $\|\overline{\mathcal{L}}\| = \alpha$, então podemos arranjar todas as fórmulas de $\overline{\mathcal{L}}$ com no máximo uma variável livre em uma sequência $\varphi_\xi, \xi < \alpha$.

- Definimos uma sequência crescente de conjuntos de sentenças de $\overline{\mathcal{L}}$:

$$T = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_\xi \subset \ldots, \quad \xi < \alpha$$

- Definimos também uma sequência d_ξ, $\xi < \alpha$, de constantes de C tais que:

  1. Cada T_ξ é consistente em $\overline{\mathcal{L}}$. (provaremos isso!)

2. Se $\xi = \zeta + 1$, então $\mathsf{T}_\xi = \mathsf{T}_\zeta \cup \{(\exists \mathsf{x}_\zeta)\, \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(\mathsf{d}_\zeta)\}$; onde x_ζ é a variável livre de φ_ζ caso haja alguma. Caso não haja, $\mathsf{x}_\zeta = \mathsf{v}_0$.
3. Se ξ for um ordinal limite diferente de 0, então $T_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} T_\zeta$.

- Suponha que para um certo ordinal ζ, T_ζ tenha sido definido. Então, neste caso, o número de sentenças em T_ζ que não são sentenças de $\mathcal{L}$ é menor do que α, isto é, o cardinal do conjunto destas sentenças é menor do que α.

- Mais ainda, cada uma destas sentenças contém um número finito de constantes de C. [2] Portanto, seja d_ζ o primeiro elemento de C que não ocorre em T_ζ (por exemplo, $\mathsf{d}_0 = \mathsf{c}_0$). Nós mostraremos que

$$T_{\zeta+1} = T_\zeta \cup \{(\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(\mathsf{d}_\zeta)\}$$

  é consistente.

- Suponha por absurdo que não é este o caso. Então, pela proposição 1.3.10.2

$$T_\zeta \vdash \neg((\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(\mathsf{d}_\zeta)$$

- Logo, por propriedades da lógica proposicional,

$$T_\zeta \vdash (\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta \wedge \neg\varphi_\zeta(\mathsf{d}_\zeta)$$

- Como d_ζ não ocorre em T_ζ, então, por propriedades da lógica de predicados,

$$T_\zeta \vdash (\forall \mathsf{x}_\zeta)\,((\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta \wedge \neg\varphi_\zeta(\mathsf{x}_\zeta))$$

- Novamente, por propriedades da lógica de predicados,

$$T_\zeta \vdash (\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta \wedge \neg(\exists \mathsf{x}_\zeta)\varphi_\zeta(\mathsf{x}_\zeta)$$

- Mas isso contradiz nossa hipótese inicial (hipótese de indução) de que T_ζ havia sido definido e que, portanto, era consistente. Logo, descartamos a hipótese do absurdo e concluímos que $T_{\zeta+1}$ é sim consistente.

[2]Lembre-se que fórmulas têm sempre comprimento finito.

- Se ξ for um ordinal limite não nulo, e cada membro da cadeia crescente $T_\zeta, \zeta < \xi$ for consistente, então é óbvio que $T_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} T_\zeta$ é consistente. Isso completa a indução e a prova de que cada T_ξ de nossa cadeia é consistente.

- Com isso definimos $\overline{T} = \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi$ que é claramente consistente em $\overline{\mathcal{L}}$ e $\overline{T}$ é claramente uma estensão de T. Resta apenas mostrar que C é um conjunto de testemunhas para $\overline{T}$ em $\overline{\mathcal{L}}$.

- Suponha que φ seja uma fórmula de $\overline{\mathcal{L}}$ com no máximo uma variável livre x. Então podemos supor que $\varphi = \varphi_\xi$ e $\mathsf{x} = \mathsf{x}_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

- Então a sentença
$$(\exists \mathsf{x}_\xi)\varphi_\xi \to \varphi_\xi(\mathsf{d}_\xi)$$
pertence a $T_{\xi+1}$ e portanto também pertence a $\overline{T}$.

- Ou seja, provamos que para qualquer sentença φ de $\overline{\mathcal{L}}$ com no máximo uma variável livre x, há uma constante $\mathsf{c} \in C$ tal que $\overline{T} \vdash (\exists \mathsf{x})\varphi \to \varphi(\mathsf{c})$ e que, portanto, C é um conjunto de testemunhas para $\overline{T}$ em $\overline{\mathcal{L}}$. ⧫

2.1.2 Lema

Seja T um conjunto consistente de sentenças e C um conjunto de testemunhas para T em $\mathcal{L}$. Então T tem um modelo $\mathfrak{A}$ tal que todo elemento de $\mathfrak{A}$ é uma interpretação de uma constante $\mathsf{c} \in C$.

Prova

- Primeiro, note que se um conjunto de sentenças T tem um conjunto de testemunhas C em $\mathcal{L}$, então C também é um conjunto de testemunhas para qualquer extensão de T.

- Segundo, se uma extensão de T tem um modelo $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A}$ também é modelo de T. Então nós podemos assumir que T é consistente maximal em $\mathcal{L}$.

- Para duas constantes $\mathsf{c}, \mathsf{d} \in C$, definimos:
$$\mathsf{c} \sim \mathsf{d} \quad \text{se e somente se} \quad \mathsf{c} \equiv \mathsf{d} \in T \ .$$

- Como T é consistente maximal, então, para $\mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e} \in C$ vale:
  - $\mathsf{c} \sim \mathsf{c}$;
  - se $\mathsf{c} \sim \mathsf{d}$ e $\mathsf{d} \sim \mathsf{e}$, então $\mathsf{c} \sim \mathsf{e}$;
  - se $\mathsf{c} \sim \mathsf{d}$ então $\mathsf{d} \sim \mathsf{c}$.

  ou seja, $\sim$ é uma relação de equivalência em C.

- Para cada $\mathsf{c} \in C$, seja

$$\overline{\mathsf{c}} = \{\mathsf{d} \in C \colon \mathsf{d} \sim \mathsf{c}\}$$

  a classe de equivalência de c.

- Propomos construir um modelo $\mathfrak{A}$ cujo conjunto de elementos A seja o conjunto de todas estas classes de equivalência $\overline{\mathsf{c}}$, para todo $\mathsf{c} \in C$. Então definimos:

  1. $A = \{\overline{\mathsf{c}} \colon \mathsf{c} \in C\}$.

  Definimos agora as relações, constantes e funções de $\mathfrak{A}$.

- Para cada símbolo de relação n-ária P em $\mathcal{L}$, definimos uma relação n-ária R' no conjunto C tal que para todo $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_n \in C$, temos:

  2. $R'(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_n)$ se e somente se $\mathsf{P}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_n) \in T$.

- De nosso axioma da identidade se segue que:

$$\vdash \mathsf{P}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_n) \wedge \mathsf{c}_1 \equiv \mathsf{d}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{c}_n \equiv \mathsf{d}_n \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{d}_1 \ldots \mathsf{d}_n)$$

- Então $\sim$ é chamada de uma *relação de congruência* para a relação R' em C. Disso se segue que podemos definir uma relação R em A por:

  3. $R(\overline{\mathsf{c}_1} \ldots \overline{\mathsf{c}_n})$ se e somente se $\mathsf{P}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_n) \in T$

- Por (2), a definição (3) é independente dos representantes das classes de equivalência $\overline{\mathsf{c}_1} \ldots \overline{\mathsf{c}_n}$. Definimos então esta relação R como a interpretação do símbolo P em $\mathfrak{A}$.

- Agora considere o símbolo de constante d de $\mathcal{L}$. É uma propriedade da lógica de predicados que:

$$\vdash (\exists \mathsf{v}_0)\,(\mathsf{d} \equiv \mathsf{v}_0)$$

- Então, $(\exists \mathsf{v}_0)\,(\mathsf{d} \equiv \mathsf{v}_0) \in T$, pois T é consistente maximal. E, além disso, como T tem um conjunto de testemunhas, existe uma constante $\mathsf{c} \in C$ tal que

$$(\mathsf{d} \equiv \mathsf{c}) \in T$$

- c pode não ser a única constante que satisfaz a propriedade acima, mas a sua classe de equivalência é única, pois os axiomas lógicos da identidade garantem que:

$$\vdash (\mathsf{d} \equiv \mathsf{c} \land \mathsf{d} \equiv \mathsf{c}' \to \mathsf{c} \equiv \mathsf{c}')$$

- A constante d é então interpretada no modelo $\mathfrak{A}$ pelo elemento $\overline{\mathsf{c}}$ de A. Em particular, se $\mathsf{d} \in C$, então d é interpretada pela sua própria classe de equivalência $\overline{\mathsf{d}}$ em $\mathfrak{A}$, porque $(\mathsf{d} \equiv \mathsf{d}) \in T$.

- Lidamos com os símbolos de função de uma maneira similar. Seja F um símbolo de função m-ária qualquer de $\mathcal{L}$, e sejam $\mathsf{c}_1, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{m} \in C$. Como antes, temos

$$(\exists \mathsf{v}_0)\,(\mathsf{F}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_\mathsf{m}) \equiv \mathsf{v}_0) \in T$$

- Mais uma vez, como c pode não ser única precisamos apelar para a seguinte propriedade garantida pelos axiomas lógicos da identidade:

$$\vdash (\mathsf{F}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_\mathsf{m}) \equiv \mathsf{c} \land \mathsf{c}_1 \equiv \mathsf{d}_1 \land \ldots \land \mathsf{c}_\mathsf{m} \equiv \mathsf{d}_\mathsf{m} \land \mathsf{c} \equiv \mathsf{d}) \to \mathsf{F}(\mathsf{d}_1 \ldots \mathsf{d}_\mathsf{m}) \equiv \mathsf{d}$$

- Isto mostra que a função G pode ser definida no conjunto A das classes de equivalência pela regra:

  4. $G(\overline{\mathsf{c}_1} \ldots \overline{\mathsf{c}_\mathsf{m}}) = \overline{\mathsf{c}}$ se e somente se $(\mathsf{F}(\mathsf{c}_1 \ldots \mathsf{c}_\mathsf{m}) \equiv \mathsf{c}) \in T$

- Deixamos para o leitor o detalhamento dos passos de (4). Interpretamos, pois, o símbolo de função F através da função G no modelo $\mathfrak{A}$.

- Com isso especificamos o conjunto universo e a interpretação de cada símbolo de $\mathcal{L}$ em $\mathfrak{A}$, finalizando a definição do modelo $\mathfrak{A}$.

- Como destacamos que a interpretação de cada constante $\mathsf{c} \in C$ em $\mathfrak{A}$ é sua classe de equivalência $\bar{\mathsf{c}}$, disso se segue que todo elemento $\bar{\mathsf{c}} \in A$ é a interpretação de alguma constante $\mathsf{c} \in C$, conforme o enunciado do lema afirma.

- Vamos agora provar que $\mathfrak{A}$ é um modelo de T. Antes de mais nada, usando (4) como um primeiro passo de uma indução, nós facilmente mostramos que:

   5. para cada termo t de $\mathcal{L}$ que não tenha variável livre e para cada constante $\mathsf{c} \in C$,

$$\mathfrak{A} \vDash \mathsf{t} \equiv \mathsf{c} \quad \text{se e somente se} \quad (\mathsf{t} \equiv \mathsf{c}) \in T.$$

- Utilizando o fato de que C é um conjunto de testemunhas para T, de (5) obtemos:

   6. para quaisquer dois termos t_1, t_2 de $\mathcal{L}$ sem variáveis livres,

$$\mathfrak{A} \vDash \mathsf{t}_1 \equiv \mathsf{t}_2 \quad \text{se e somente se} \quad (\mathsf{t}_1 \equiv \mathsf{t}_2) \in T,$$

   7. para cada fórmula atômica $\mathsf{P}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n})$ de $\mathcal{L}$ sem variáveis livres,

$$\mathfrak{A} \vDash \mathsf{P}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n}) \quad \text{se e somente se} \quad \mathsf{P}(\mathsf{t}_1 \ldots \mathsf{t}_\mathsf{n}) \in T,$$

- Combinando (6) e (7) temos a base da prova por indução no comprimento das sentenças de $\mathcal{L}$ de que:

   8. Para qualquer sentença φ de $\mathcal{L}$,

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \quad \text{se e somente se} \quad \varphi \in T$$

- A prova do passo indutivo (8) usará os fatos de que T é consistente maximal e tem testemunhas em $\mathcal{L}$. Sejam φ e ψ sentenças de $\mathcal{L}$. Não é difícil concluir por indução que (deixamos os detalhes ao leitor):

$$\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \quad \text{se e somente se} \quad (\neg\varphi) \in T \quad \text{e}$$
$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \psi \quad \text{se e somente se} \quad (\varphi \wedge \psi) \in T$$

- Vejamos o caso do existencial.

- ($\Rightarrow$) Suponha que $\varphi = (\exists \mathsf{x})\psi$. Se $\mathfrak{A} \models \varphi$, então para algum $\bar{\mathsf{c}} \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{\mathsf{c}}]$.

- Isto significa que $\mathfrak{A} \models \psi(\mathsf{c})$, onde $\psi(\mathsf{c})$ é obtido de ψ substituindo todas as ocorrências livres de x por c. Então, por HI, $\psi(\mathsf{c}) \in T$.

- Mas por propriedades da lógica de primeira ordem,

$$\vdash \psi(\mathsf{c}) \to (\exists \mathsf{x})\psi$$

- Então, como T é consistente maximal, $\varphi \in T$.

- ($\Leftarrow$) Agora suponha que $\varphi \in T$. Como T tem testemunas, existe uma constante $\mathsf{c} \in C$ tal que:

$$T \vdash (\exists \mathsf{x})\psi \to \psi(\mathsf{c})$$

- Como T é maximal, $\psi(\mathsf{c}) \in T$, então, por HI, $\mathfrak{A} \models \psi(\mathsf{c})$. Portanto, $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{\mathsf{c}}]$ e $\mathfrak{A} \models \varphi$.

- Assim, terminamos a prova de que $\mathfrak{A} \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in T$ e como T é maximal, mostramos que $\mathfrak{A}$ é modelo de T. ⧫

O oposto do Lema acima é facilmente demonstrado e, de fato:

2.1.3 Lema

Seja C um conjunto de símbolos de constante de $\mathcal{L}$, e seja T um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$. Se T tem um modelo $\mathfrak{A}$ tal que todo elemento de $\mathfrak{A}$ é a interpretação de alguma constante $\mathsf{c} \in C$, então T pode ser estendido a um conjunto consistente $\overline{T}$ em $\mathcal{L}$ para o qual C é um conjunto de testemunhas.

Prova

Basta tomar $\overline{T}$ como o conjunto de todas as sentenças de $\mathcal{L}$ verdadeiras em $\mathfrak{A}$ e verificar que $\overline{T}$ estende T da maneira anunciada pelo lema. (*esta prova fica como exercício*). ⧫

- Dizemos que um modelo $\mathfrak{A}$ construido a partir das constantes $\mathsf{c} \in C$ tomando as classes de equivalência adequadas, como fizemos na prova do lema, é *construído a partir do conjunto C de constantes de $\mathcal{L}$*.

- Como todo $a \in A$ é a interpretação de algum $\mathsf{c} \in C$, vemos imediatamente que $|A| \leqslant |C|$.
- Com estes lemas, finalizaremos agora a prova do teorema da completude e de alguns de seus importantes corolários.

Teorema 1.3.21 – Teorema da Completude Estendida

Seja Σ um conjunto de sentenças de $\mathcal{L}$. Então Σ é consistente se e somente se Σ tem um modelo.

Prova

- Fica como exercício **para entregar!!** É bastante direta através da aplicação dos lemas anteriormente demonstrados.

2.1.4 Corolário – Teorema de Löwenheim-Skolem Descentente

Toda teoria consistente T em $\mathcal{L}$ tem um modelo cuja potência (cardinalidade) é no máximo $\|\mathcal{L}\|$.

Prova

- O modelo $\mathfrak{B}$ construído para a prova do Teorema da completude é uma redução de um modelo $\mathfrak{A}$ no qual cada elemento do universo é a classe de equivalência de uma constante de $\overline{\mathcal{L}}$.
- Então, notando que $|B| \leqslant |A| \leqslant \|\overline{\mathcal{L}}\| = \|\mathcal{L}\|$, provamos o teorema. ♦
- O corolário 2.1.4 tem como consequência o teorema de Löwenheim original de 1915: *se uma sentença tem um modelo, então tem um modelo enumerável (finito ou infinito).*

Teorema 1.3.20 – Teorema da Completude de Gödel

Uma sentença de $\mathcal{L}$ é um teorema se e somente se for válida.

Prova

- Fica como exercício **para entregar!!**

Teorema 1.3.22 – Teorema da Compacidade

Um conjunto de sentenças Σ tem modelo se e somente se todo subconjunto finito de Σ tem um modelo.

Prova

- ($\Rightarrow$) Trivial.
- ($\Leftarrow$) Hipótese: todo subconjunto finito de Σ tem modelo.
- Então, pelo Teorema da Completude Estendida (1.3.21), todo subconjunto finito de Σ é consistente.
- Então, pela Proposição 1.3.10.1 Σ é consistente.
- Então, pelo Teorema da Completude Estendida (1.3.21), Σ tem modelo. ♦

Terminaremos a seção com uma lista representativa de aplicações ou conseqüências dos teoremas da completude e compacidade.

2.1.5 Corolário

Se uma teoria T tem modelos finitos arbitrariamente grandes (de qualquer cardinalidade finita), então ela tem um modelo infinito.

Prova

- Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$ com modelos finitos arbitrariamente grandes.
- Considere a expansão $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\mathsf{c_n} : n \in \omega\}$, onde $\mathsf{c_n}$ é uma lista de símbolos de constante distintos e não pertencentes a $\mathcal{L}$.
- Considere o conjunto Σ de sentenças de $\mathcal{L}'$ definido por:

$$\Sigma = T \cup \{\neg(\mathsf{c_n} \equiv \mathsf{c_m}) : n < m < \omega\}$$

- Qualquer subconjunto finito Σ' de Σ envolverá no máximo as constantes $\mathsf{c_0}, \ldots, \mathsf{c_m}$ para algum $m < \omega$.

- Seja $\mathfrak{A}$ um modelo de T com pelo menos $m+1$ elementos e seja $a_0, \ldots, a_m$ uma lista com $m+1$ elementos distintos de $\mathfrak{A}$.
- Podemos facilmente verificar que o modelo $(\mathfrak{A}, a_0, \ldots, a_m)$ para $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_0, \ldots, \mathsf{c}_\mathsf{m}\}$ é um modelo de Σ'.
- Então, como Σ' tem modelo e é um subconjunto finito qualquer de Σ, pelo Teorema da Compacidade (1.3.22), Σ tem modelo.
- Note que como a linguagem de Σ tem infinitas constantes que, pela definição de Σ são todas distintas, então o domínio do modelo de Σ é infinito (tem cardinalidade infinita).
- Mas a redução deste modelo infinito de Σ a $\mathcal{L}$ certamente continuará infinita e, pela construção de Σ, será modelo de T. ⧫

2.1.6 Corolário – Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente

Se T tem modelos infinitos, então tem modelos infinitos de qualquer potência (cardinalidade) $\alpha \geqslant \|\mathcal{L}\|$.

Prova

- A prova é similar à do Corolário 2.1.5.
- Seja $\mathsf{c}_\xi, \xi < \alpha$, uma lista de símbolos de constante distintos que não estão em $\mathcal{L}$.
- Considere o conjunto de sentenças:

$$\Sigma = T \cup \{\neg(\mathsf{c}_\xi \equiv \mathsf{c}_\eta) : \xi < \eta < \alpha\}$$

- Todo subconjunto finito Σ' de Σ envolverá no máximo um número finito de constantes c_ξ
- Seja $\mathfrak{B}$ um modelo infinito de T. Como no resultado anterior, $\mathfrak{B}$ pode ser expandido para que seja modelo de Σ'.
- Então, pelo Teorema da Compacidade (1.3.22), Σ tem um modelo $\mathfrak{A}$.

- Pelo Corolário 2.1.4 podemos considerar que a cardinalidade (potência) do modelo $\mathfrak{A}$ (em símbolos $|A|$) é no máximo

$$\|\mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_\xi : \xi < \alpha\}\| = \alpha$$

- Ou seja, $|A| \leqslant \alpha$.

- Por outro lado, de acordo com a definição de Σ, as interpretações das constantes c_ξ em $\mathfrak{A}$ devem ser elementos distintos de A.

- Então $\alpha \leqslant |A| \leqslant \alpha$. Logo, $|A| = \alpha$. ♦

Um resultado que foi publicado pela primeira vez por Skolem, em 1934, é o seguinte:

2.1.7 Corolário

Há modelos não-standard para a teoria dos números completa.

Prova

- Lembre-se do Exemplo 1.4.11, em que a teoria dos números completa foi definida como o conjunto de todas as sentenças em vigor no modelo standard $\langle \omega, +, \cdot, S, 0 \rangle$ da teoria dos números.

- Uma vez que $\langle \omega, +, \cdot, S, 0 \rangle$ é infinito, então a teoria dos números completa tem modelo infinito.

- Então, pelo Teorema de Löwenheim-Slolem ascendente (Corolário 2.1.6) a teoria dos números completa tem modelos de todas as cardinalidades infinitas.

- Mas um modelo não-enumerável para a teoria dos números é, claramtente, não-standard. ♦

Um artifício simples, porém poderoso em teoria de modelos é o *método dos diagramas.*

- Seja $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathcal{L}$. Nós expandimos a linguagem $\mathcal{L}$ para uma nova linguagem
$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_a : a \in A\}$$
adicionando um símbolo de constante novo c_a para cada cada elemento $a \in A$ do domínio de $\mathfrak{A}$.

- Fazemos isso de modo que se $a \neq b$ então c_a e c_b são símbolos diferentes.

- Podemos agora expandir o modelo $\mathfrak{A}$ para a lingaugem $\mathcal{L}_A$:
$$\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$$
indicando, para cada constante nova c_a, o elemento a como a sua interpretação.

- O *diagrama de* $\mathfrak{A}$, denotado por $\Delta_{\mathfrak{A}}$, é o conjunto de todas as sentenças atômicas e negações de sentenças atômicas de $\mathcal{L}_A$ verdadeiras no modelo $\mathfrak{A}_A$.

- Se X é um subconjunto de A, então definimos $\mathcal{L}_X$ como a linguagem $\mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_a : a \in X\}$ e o modelo $\mathfrak{A}_X = (\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$ a expansão óbvia de $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}_X$.

- Se f for um mapeamento de X no conjunto de elementos B de um modelo $\mathfrak{B}$ para $\mathcal{L}$, então $(\mathfrak{B}, fa)_{a \in X}$ é a expansão de $\mathfrak{B}$ a um modelo para $\mathcal{L}_X$ tal que para cada c_a indica-se fa como sua interpretação.

- O método de adicionar símbolos de constante novos para os elementos de um modelo é bastante usado em teoria de modelos. A proposição seguinte ilustra a utilidade dos diagramas.

2.1.8 Proposição

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ modelos para $\mathcal{L}$ e seja $f : A \to B$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. f é uma imersão isomórfica de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$
2. Há uma extensão $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$ e um isomorfismo $g : \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ tal que $f \subset g$.
3. $(\mathfrak{B}, fa)_{a \in A}$ é um modelo do diagrama de $\mathfrak{A}$.

Prova

- $(2 \Rightarrow 1)$ Trivial.
- $(1 \Rightarrow 2)$
- Assumindo (1) podemos estender o conjunto A para um conjunto C e estender a função f para uma bijeção g de C em B.
- Então definimos as relações de $\mathfrak{C}$ através da regra

  $$\mathfrak{C} \models \mathsf{R}[\mathsf{c_1} \ldots \mathsf{c_n}] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \mathsf{R}[g\mathsf{c_1} \ldots g\mathsf{c_n}]$$

  e as funções de $\mathfrak{C}$ de modo similar, o que nos dá (2).
- $(1 \Leftrightarrow 3)$
- Pela Proposição 1.3.18, para cada fórmula $\varphi(\mathsf{x_1} \ldots \mathsf{x_n})$ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em A,

  $$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n] \Longleftrightarrow \mathfrak{A}_A \models \varphi(\mathsf{c}_{a_1} \ldots \mathsf{c}_{a_n})$$

  e

  $$\mathfrak{B} \models \varphi[fa_1 \ldots fa_n] \Longleftrightarrow (\mathfrak{B}, fa)_{a \in A} \models \varphi(\mathsf{c}_{a_1} \ldots \mathsf{c}_{a_n})$$
- E isso termina a prova. ⧫

A proposição acima mostra que as seguintes três condições são equivalentes:

1. $\mathfrak{A}$ é isomorficamente imerso em $\mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{B}$ é isomórfico a uma extensão de $\mathfrak{A}$.
3. $\mathfrak{B}$ pode ser expandido para um modelo do diagrama de $\mathfrak{A}$.

- No caso especial em que $A \subset B$ e f é a função identidade de A para B, a Proposição 2.1.8 mostra que $\mathfrak{A}$ é submodelo de $\mathfrak{B}$ se e somente se $\mathfrak{B}_A$ é modelo do diagrama de $\mathfrak{A}$.

2.1.9 Corolário

Suponha que $\mathcal{L}$ não tem símbolos de função nem de constante. Seja T uma teoria em $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{A}$ um modelo para $\mathcal{L}$. Então $\mathfrak{A}$ é isomorficamente imerso em algum modelo de T se e somente se todo submodelo finito de $\mathfrak{A}$ é isomorficamente imerso em algum modelo de T.

Prova

- ($\Rightarrow$) É simples e sugerimos como exercício.
- ($\Leftarrow$) Considere $\Sigma = T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$.
- Todo Σ', subconjunto finito de Σ, tem um número finito de novas constantes, digamos $\mathsf{c}_{a_1}, \ldots, \mathsf{c}_{a_m}$.
- Como a linguagem $\mathcal{L}$ não tem símbolos de constante, o conjunto finito $A' = \{a_1, \ldots, a_m\}$ gera um submodelo finito $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$.
- Seja $\mathfrak{B}'$ um modelo de T no qual $\mathfrak{A}'$ é isomorficamente imerso. Nós vemos, sem dificuldade, que $\Sigma' \subset T \cup \Delta_{\mathfrak{A}'}$.
- Então, pela Proposição 2.1.8, $\mathfrak{B}'$ pode ser expandido a um modelo de Σ' e, então, Σ' tem um modelo.
- Assim, por compacidade, Σ tem um modelo $\mathfrak{B}$.
- Novamente pela Proposição 2.1.8, a redução de $\mathfrak{B}$ a $\mathcal{L}$ resulta em um modelo para T ao qual $\mathfrak{A}$ é isomorficamente imerso. ♦

Pularemos os Corolários 2.1.10 e 2.1.11. Para maiores esclarecimentos consulte o texto original.

- Considere $\Delta_{\mathfrak{A}}$ o diagrama de $\mathfrak{A}$. A Proposição 2.1.8 nos mostrou uma conexão forte entre os modelos de $\Delta_{\mathfrak{A}}$ e os modelos nos quais $\mathfrak{A}$ pode ser isomorficamente imerso.
- Chamamos de *diagrama positivo de* $\mathfrak{A}$ ao subconjunto de $\Delta_{\mathfrak{A}}$ que consiste apenas de sentenças atômicas (sem considerar as negações de sentenças atômicas).
- Veremos que diagramas positivos são associados com a seguinte noção de *imersão homomórfica*.

Homomorfismo

- Dados dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ para $\mathcal{L}$, dizemos que $\mathfrak{A}$ *é homomórfico a* $\mathfrak{A}'$ se e somente se existe uma função f de A em A' que satisfaz as seguintes propriedades:

  1. Para cada relação n-aria R de $\mathfrak{A}$ e sua relação correspondente R' de $\mathfrak{A}'$, e para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ de A:
  $$R(x_1 \ldots x_n) \quad \text{se e somente se} \quad R'(f(x_1) \ldots f(x_n))$$
  2. Para cada função m-ária G de $\mathfrak{A}$ e sua função correspondente G' de $\mathfrak{A}'$, e para quaisquer $x_1, \ldots, x_m$ de A:
  $$f(G(x_1 \ldots x_m)) = G'(f(x_1) \ldots f(x_m))$$
  3. Para cada constante x de $\mathfrak{A}$ e sua constante correspondente x' de $\mathfrak{A}'$:
  $$f(x) = x'$$

- Uma função f que satisfaz as condições acima é chamada de um *homomorfismo de* $\mathfrak{A}$ *em* $\mathfrak{A}'$, o qual denotaremos por $\mathfrak{A} \simeq_f \mathfrak{A}'$.

- Quando $\mathfrak{A} \simeq_f \mathfrak{A}'$ diremos também que $\mathfrak{A}'$ é a imagem homomórfica de $\mathfrak{A}$.

- Note que a única diferença entre homomorfismo e isomorfismo é que exige-se de um isomorfismo que a função f seja bijetora, enquanto que em um homomorfismo não há qualquer restrição sobre f.

Imersão Homomórfica

- $\mathfrak{A}$ *está homomórficamente imerso em* $\mathfrak{A}'$ se e somente se $\mathfrak{A}$ for homomórfico a algum submodelo de $\mathfrak{A}'$.

A proposição seguinte corresponde à Proposição 2.1.8 substituindo-se isomorfismos por homomorfismos.

2.1.12 Proposição

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ podelos para $\mathcal{L}$. Então $\mathfrak{A}$ está homomórficamente imerso em $\mathfrak{B}$ se e somente se alguma expansão de $\mathfrak{B}$ for modelo do diagrama positivo de $\mathfrak{A}$.

2.1.13 Corolário

Toda ordem parcial em um conjunto X pode ser estendida a uma ordem simples em X.

Prova

- Suponha que $\leqslant$ ordena parcialmente X.
- Seja $\mathfrak{A} = \langle X, \leqslant \rangle$ e seja $\{\mathsf{c}_x : x \in X\}$ constantes distintas para $x \in X$.
- Seja Δ o diagrama positivo de $\mathfrak{A}$ e, para todo x, y em X, seja

$$\Sigma = \Delta \cup \{\mathsf{c}_x \not\equiv \mathsf{c}_y : x \neq y\} \cup \{(\forall \mathsf{x}\mathsf{y})\,(\mathsf{x} \leqslant \mathsf{y} \vee \mathsf{y} \leqslant \mathsf{x})\}$$

- Seja Σ' um subconjunto finito de Σ que envolve, digamos, os elementos $x_1, \ldots, x_n$ e suas constantes correspondentes.
- Precisamos da prova do seguinte fato:

  1. Toda ordem parcial $\leqslant$ em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pode ser estendida a uma ordem simples $\leqslant'$ em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $\leqslant$ seja preservada, ou seja, se $x_i \leqslant x_j$ então $x_i \leqslant' x_j$.

- A prova de (1) não é difícil. É feita por indução em n e a deixamos como exercício.
- Assumindo (1), vemos que $\langle \{x_1, \ldots, x_n\}, \leqslant' \rangle$ é um modelo de Σ'.
- Como tomamos um Σ' arbitrário, pelo teorema da compacidade Σ tem um modelo $\langle Y, \leqslant' \rangle$ que é uma ordem simples no qual para cada constante c_x há um elemento correspondente y_x.
- Claramente, o conjunto $\{y_x : x \in X\}$ é simplesmente ordenado por $\leqslant'$.
- Além disso, também podemos notar que se $x \leqslant z$ então $y_x \leqslant' y_z$, e se $x \neq z$, então $y_x \neq y_z$.
- Usando a função inversa da bijeção que relaciona cada elemento de Y com um elemento de X ($y : x \to y_x$), nós podemos induzir uma ordem simples em X que estende $\leqslant$. ♦

Exercícios para Entregar

- Prova do Teorema 1.3.21 (Completude Estendida)
- Prova do Teorema 1.3.20 (Completude de Gödel)
- Resolver os exercícios 2.1.3 e 2.1.10

3 Primeiras Construções Modelo-Teoréticas

3.1 Extensões Elementares e Cadeias Elementares

- Dados dois modelos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ para $\mathcal{L}$, nós já definimos as noções de $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ (equivalência elementar) e $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ (submodelo).
- A combinação natural destas duas noções levará a modelos que são submodelos ou extensões de um modelo elementarmente equivalente.
- Por exemplo, o modelo $\langle \omega - \{0\}, \leqslant \rangle$ é um submodelo de $\langle \omega, \leqslant \rangle$, e uma vez que estes modelos são isomórficos, eles são também elementarmente equivalentes (Proposição 1.3.19).
- No entanto, o elemento 1 é o primeiro elemento de $\langle \omega - \{0\}, \leqslant \rangle$ mas é o segundo elemento de $\langle \omega, \leqslant \rangle$.
- Um submodelo elementar é uma noção muito mais forte do que esta. Explicitamente, um submodelo elementar é um submodelo de um dado modelo no qual os elementos em comum devem ter nos dois modelos exatamente as mesmas propriedades de primeira ordem. Vamos formalizar esta definição.
- $\mathfrak{A}$ é um *submodelo elementar* de $\mathfrak{B}$ se e somente se $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ e para todas as fórmulas φ de $\mathcal{L}$ nas variáveis $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ e para todos os elementos $a_1, \ldots, a_n$ em A, temos:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

- Se $\mathfrak{A}$ é submodelo elementar de $\mathfrak{B}$, então $\mathfrak{B}$ é uma *extensão elementar* de $\mathfrak{A}$.

- Para além de algumas propriedades simples de submodelos e extensões elementares, vamos nesta seção responder às seguintes questões:

    1. Como podemos saber se um modelo $\mathfrak{A}$ é (a menos de isomorfismo) um submodelo elementar de algum outro modelo $\mathfrak{B}$?
    2. Há alguma restrição sobre as cardinalidades de submodelos e extensões elementares de um dado modelo $\mathfrak{A}$?
    3. Quando dois ou mais modelos podem ter uma extensão elementar comum?
    4. Pode a noção de extensão elementar ser iterada transfinitamente?

- Usaremos a notação $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ para denotar que $\mathfrak{A}$ é um submodelo elementar de $\mathfrak{B}$. Por conveniência, a notação $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ será usada para denotar que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

- Seja $X \subset A$. A notação $(\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$, ou $\mathfrak{A}_X$ será usada para denotar a expansão óbvia de $\mathfrak{A}$ para a linguagem $\mathcal{L}_X = \mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_a : a \in X\}$ com as novas constantes c_a.

3.1.1 Proposição

1. Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}$.
3. Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.
4. Se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Prova

- Fica como exercício **para entregar**. É bastante direta a partir das definições.

3.1.2 Proposição

$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ se e somente se $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ e para todas as fórmulas $\exists \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x}\mathsf{x}_1 \dots \mathsf{x}_n)$ nas variáveis $\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$ e para todo $a_1 \dots a_n$ em A, se $\mathfrak{B} \models \exists \mathsf{x}\, \varphi[a_1 \dots a_n]$, então existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a a_1 \dots a_n]$.

Prova

- $(\Rightarrow)$ **Hipótese**: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$
- Então, pela definição de submodelo elementar,

  1. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ e
  2. para toda ψ em $\mathsf{x_1}, \ldots, \mathsf{x_n}$ e $a_1, \ldots a_n \in A$,

  $$\mathfrak{A} \models \psi[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[a_1 \ldots a_n]$$

- Assuma, por hipótese condicional, que $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi[a_1 \ldots a_n]$
- Então, por (2), $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[a_1 \ldots a_n]$
- Logo, pela definição de satisfação, $\exists a \in A \;/\; \mathfrak{A} \models \varphi[aa_1 \ldots a_n]$
- Então, por (2), $\exists a \in A \;/\; \mathfrak{B} \models \varphi[aa_1 \ldots a_n]$
- Assim, descartando a hipótese condicional, obtemos:

  3. $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi[a_1 \ldots a_n] \Rightarrow \exists a \in A \;/\; \mathfrak{B} \models \varphi[aa_1 \ldots a_n]$

- Portanto, por (1) e (3) provamos a ida.
- $(\Leftarrow)$ **Hipótese**:

  1. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ e
  2. para toda $\exists \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x}\mathsf{x_1} \ldots \mathsf{x_n})$ e todo $a_1 \ldots a_n$ em A,

  $$\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi[a_1 \ldots a_n] \Rightarrow \exists a \in A \;/\; \mathfrak{B} \models \varphi[aa_1 \ldots a_n]$$

- Dada a hipótese (1), para provar que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ basta provarmos que:

  3. para toda ψ em $\mathsf{x_1}, \ldots, \mathsf{x_n}$ e $a_1, \ldots a_n \in A$,

  $$\mathfrak{A} \models \psi[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[a_1 \ldots a_n]$$

- Provaremos (3) por indução no comprimento de ψ.
- **BASE 1**: ψ é $(\mathsf{t_1} \equiv \mathsf{t_2})$.

- $\mathfrak{B} \models (\mathsf{t_1} \equiv \mathsf{t_2})[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $\mathsf{t_1}[a_1 \ldots a_n] = \mathsf{t_2}[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(1)}$
  $\mathfrak{A} \models (\mathsf{t_1} \equiv \mathsf{t_2})[a_1 \ldots a_n]$
- **BASE 2**: ψ é $\mathsf{P}(\mathsf{t_1} \ldots \mathsf{t_m})$.
- $\mathfrak{B} \models \mathsf{P}(\mathsf{t_1} \ldots \mathsf{t_m})[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $R(\mathsf{t_1}[a_1 \ldots a_n] \ldots \mathsf{t_m}[a_1 \ldots a_n]) \Leftrightarrow_{(1)}$
  $\mathfrak{A} \models \mathsf{P}(\mathsf{t_1} \ldots \mathsf{t_m})[a_1 \ldots a_n]$
- **PASSO**: ψ tem comprimento k.
- **HI**: toda fórmula θ com comprimento menor do que k satisfaz a proposição.
- **CASO 1**: ψ é $(\theta_1 \wedge \theta_2)$
- $\mathfrak{B} \models (\theta_1 \wedge \theta_2)[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{B} \models \theta_1[a_1 \ldots a_n]$ e $\mathfrak{B} \models \theta_2[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(HI)}$
  $\mathfrak{A} \models \theta_1[a_1 \ldots a_n]$ e $\mathfrak{A} \models \theta_2[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{A} \models (\theta_1 \wedge \theta_2)[a_1 \ldots a_n]$
- **CASO 2**: ψ é $(\neg\theta)$
- $\mathfrak{B} \models \neg\theta[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{B} \not\models \theta[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(HI)}$
  $\mathfrak{A} \not\models \theta[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{A} \models \neg\theta[a_1 \ldots a_n]$
- **CASO 3**: ψ é $(\exists \mathsf{x}\, \theta)$. Vamos separar a ida e a volta deste caso.
- $(\Rightarrow)$
- $\mathfrak{B} \models \exists \mathsf{x}\, \theta[a_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(2)}$
  $\exists a \in A \ / \ \mathfrak{B} \models \theta[a a_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(HI)}$
  $\exists a \in A \ / \ \mathfrak{A} \models \theta[a a_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{A} \models \exists \mathsf{x}\, \theta[a_1 \ldots a_n]$

- $(\Leftarrow)$
- $\mathfrak{A} \models \exists \mathsf{x}\, \theta[a_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(df)}$
  $\exists a \in A \;/\; \mathfrak{A} \models \theta[aa_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(HI)}$
  $\exists a \in A \;/\; \mathfrak{B} \models \theta[aa_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(1)}$
  $\exists a \in B \;/\; \mathfrak{B} \models \theta[aa_1 \ldots a_n] \Rightarrow_{(df)}$
  $\mathfrak{B} \models \exists \mathsf{x}\, \theta[a_1 \ldots a_n]$
- Isto termina a prova de (3). Assim, de (1) e (3), pela definição de submodelo elementar, temos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. ♦

Similarmente à definição de submodelo elementar, podemos definir uma imersão elememntar:

- Uma função $f : A \longrightarrow B$ é uma *imersão elementar* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, que denotaremos por $f : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, se e somente se para todas as fórmulas $\varphi(\mathsf{x_1} \ldots \mathsf{x_n})$ de $\mathcal{L}$ e n-uplas $a_1, \ldots, a_n \in A$, temos:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[fa_1 \ldots fa_n]$$

- Uma imersão elementar de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é, então, a mesma coisa que um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em um submodelo elementar de $\mathfrak{B}$.
- A notação $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ denota que $\mathfrak{A}$ é elementarmente imerso em $\mathfrak{B}$.
- Seja $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{\mathsf{c}_a : a \in A\}$. O *diagrama elementar* de $\mathfrak{A}$ é a teoria $Th(\mathfrak{A}_A)$ de todas as sentenças de $\mathcal{L}_A$ verdadeiras no modelo $\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$.
  - Lembre-se que o diagrama de $\mathfrak{A}$ é o conjunto de todas as sentenças atômicas e negações de sentenças atômicas de $\mathcal{L}_A$ que são verdadeiras em $\mathfrak{A}_A$.

3.1.3 Proposição

Seja Γ_A o diagrama elementar de $\mathfrak{A}$. Então, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ se e somente se alguma expansão $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ for modelo de Γ_A. Se $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ se e somente se $(\mathfrak{B}, a)_{a \in A} \models \Gamma_A$.

Prova

Basta verificar que a expansão $(\mathfrak{B}, fa)_{a\in A} \vDash \Gamma_A$. ♦

3.1.4 Proposição

Seja $\mathfrak{F}$ um conjunto não vazio qualquer de modelos elementarmente equivalentes. Então existe um modelo $\mathfrak{B}$ tal que todo modelo $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ é elementarmente imerso em $\mathfrak{B}$.

Prova

- Para cada $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$, seja Γ_A o seu diagrama elementar.
- Vamos considerar, sem perda de generalidade, que quando $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$ então:
$$\{\mathsf{c}_a : a \in A\} \cap \{\mathsf{c}_a : a \in A'\} = \varnothing$$
- Seja $\Delta = \bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{F}} \Gamma_A$. Alegamos que Δ é um conjunto consistente de sentenças de $\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{F}} \mathcal{L}_A$
- Suponha que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um subconjunto finito qualquer de Δ. Suponha também que para $i \neq j$, φ_i e φ_j vêm de diferentes $\mathfrak{A}$'s.
- Então há fórmulas $\varphi_1', \ldots, \varphi_n'$ nas variáveis $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_\mathsf{m}$ e elementos $a_{ij} \in A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ tais que $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{F}$ e
$$\varphi_i = \varphi_i'(\mathsf{c}_{a_{i1}} \ldots \mathsf{c}_{a_{im}}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$
- Então a sentença $\exists \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_\mathsf{m}\, \varphi_1' \wedge \exists \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_\mathsf{m}\, \varphi_2' \wedge \ldots \wedge \exists \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_\mathsf{m}\, \varphi_\mathsf{n}'$ será verdadeira em $\mathfrak{A}_1$, uma vez que $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$.
- Isto mostra que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ tem modelo e é consistente. Logo, por Compacidade e Completude, Δ é consistente e tem um modelo $\mathfrak{B}'$.
- Seja $\mathfrak{B}$ a redução de $\mathfrak{B}'$ para a linguagem original $\mathcal{L}$. Então a Proposição 3.1.3 mostra que cada $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$ está elementarmente imerso em $\mathfrak{B}$. ♦

3.1.5 Teorema

Todo modelo infinito $\mathfrak{A}$ tem extensões elementares arbitrariamente grandes.

Prova

- Seja Γ o diagrama elementar de $\mathfrak{A}$.
- Pelo Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente, Γ tem modelos arbitrariamente grandes.
- Então a segunda parte da Proposição 3.1.3 garante que as restrições destes modelos de Γ à linguagem original serão extensões de $\mathfrak{A}$, que são arbitrariamente grandes. ⧫

O Teorema acima representa uma versão mais forte do teorema de Löwenheim-Skolem ascendente. Já o teorema seguinte representa uma versão mais forte do teorema de Löwenheim-Skolem descentende.

3.1.6 Teorema

Seja $\mathfrak{A}$ um modelo de potência α e seja $\|\mathcal{L}\| \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Então $\mathfrak{A}$ tem um submodelo elementar de potência β. Mais que isso. Dado qualquer conjunto $X \subset A$ de potência $\leqslant \beta$, $\mathfrak{A}$ tem um submodelo elementar de potência β que contém X.

Prova

- Assumimos, sem perda de generalidade, que X tem potência β.
- Para cada fórmula $\varphi(xx_1 \ldots x_n)$ e cada n-upla $a_1, \ldots a_n \in X$ tais que $\mathfrak{A} \models (\exists \mathrm{x})\, \varphi[a_1 \ldots a_n]$, escolha um elemento $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[ba_1 \ldots a_n]$.
- Seja X_1 o conjunto X acrescido de todos estes b's escolhidos. Como $|X| = \beta$ e $\|\mathcal{L}\| \leqslant \beta$, então $|X_1| = \beta$.
- Agora repita este processo um número enumerável de vezes, formando a seguinte cadeia:
$$X \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$$
- Seja $B = \bigcup_{n<\omega} X_n$. B é fechado para as funções de $\mathfrak{A}$ e como cada X_n tem potência β, então B tem potência β.

- Seja $\mathfrak{B}$ o submodelo de $\mathfrak{A}$ com universo B. Considere uma fórmula $\varphi(xx_1 \ldots x_n)$ e a n-upla $b_1, \ldots b_n \in B$ tal que

$$\mathfrak{A} \vDash (\exists \mathsf{x})\, \varphi[b_1 \ldots b_n]$$

- Para algum $m < \omega$, temos $b_1, \ldots b_n \in X_m$. Então, existe $b \in X_{m+1}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[bb_1 \ldots b_n]$.

- Então $b \in B$, e pela Proposição 3.1.2 temos que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. ♦

Chegamos agora a um importante teorema, que deduz completude de categoricidade para teorias com modelos infinitos.

3.1.7 Proposição - Teste de Łoś-Vaught

Suponha que uma teoria consistente T tenha apenas modelos infinitos e que T seja α-categórica para algum cardinal infinito $\alpha \geqslant \|\mathcal{L}\|$. Então T é completa.

Prova

- É suficiente mostrar que quaisquer dois modelos $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ de T são elementarmente equivalentes.[3]

- Como T tem apenas modelos infinitos, então pelo teorema de Löwenheim-Skolem (ambos, tanto o ascendente quanto o descente), há modelos $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$ de potência α tais que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}'$.

- Como T é α-categórica, então $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$. Logo $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. ♦

Por exemplo, as teorias seguintes são categóricas para alguma potência infinita e não têm modelos finitos. Portanto, pelo *Teste de Łoś-Vaught*, todas elas são completas:

1. A teoria dos conjuntos densos ilimitados linearmente ordenados é ω-categórica.

2. A teoria das álgebras de boole sem átomos é ω-categórica.

[3] Faça, como exercício **para entregar**, a prova de que *se todos os modelos de uma teoria T são elementarmente equivalentes, então T é completa.*

3. A teoria dos campos algebricamente fechados com característica zero (ou p) é ω_1-categórica.

4. A teoria dos grupos abelianos infinitos com todos os elementos de ordem p é α-categórica para todo α.

5. A teoria dos enumeráveis símbolos de constante distintos é ω_1-categórica.

6. A teoria das bijeções de A sem ciclos finitos é ω_1-categórica.

Vamos agora nos concentrar no segundo tópico principal desta seção, as construções de modelos por cadeias elementares.

- Uma *cadeia de modelos* é uma sequência crescente de modelos cujo tamanho é um ordinal α.

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\beta \subset \ldots, \quad \beta < \alpha$$

- A *união de uma cadeia* é o modelo $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ que é definido como se segue:
  - O universo de $\mathfrak{A}$ é o conjunto $A = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$.
  - Cada relação R de $\mathfrak{A}$ é a união das relações correspondentes de $\mathfrak{A}_\beta$: $R = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$.
  - Similarmente, cada função G de $\mathfrak{A}$ é a união das funções correspondentes de $\mathfrak{A}_\beta$: $G = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$.
  - Todos os modelos $\mathfrak{A}_\beta$ e o modelo $\mathfrak{A}$ têm as mesmas constantes (por definição de submodelo).

3.1.8 Lema

Dada uma cadeia de modelos $\mathfrak{A}_\beta, \beta < \alpha$, o modelo $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ é o único modelo cujo universo é $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ que contém cada $\mathfrak{A}_\beta$ como submodelo. ⧫

- Quando iteramos a noção de extensão elementar, chegamos à noção de cadeia elementar.

- Uma cadeia elementar é uma cadeia de modelos

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_\beta \prec \ldots, \quad \beta < \alpha$$

  tal que $\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}_\beta$ sempre que $\gamma < \beta < \alpha$.

- O teorema seguinte é o análogo do lema anterior para cadeias elementares. Este teorema representa uma construção muito importante em Teoria de Modelos, com muitas aplicações.

3.1.9 Teorema da Cadeia Elementar

Seja $\mathfrak{A}_\xi, \xi < \alpha$ uma cadeia elementar de modelos. Então $\mathfrak{A}_\xi \prec \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi$ para todo $\xi < \alpha$.

Prova

Exercício para entregar!

Exercícios para Entregar

- Prova da Proposição 3.1.1 (todos os 4 itens)
- Provar que: "Se todos os modelos de T são elementarmente equivalentes, então T é completa".
- Prova do Teorema 3.1.9.

4 Ultraprodutos

4.1 O Teorema Fundamental

- Já vimos os métodos de construção de modelos através de constantes e de cadeias elementares. Vamos agora estudar mais um importante método de construção de modelos, o método do construção por ultrappordutos.
- Este método foi introduzido por Skolem, em 1930, e desde o trabalho de Łos de 1955 vem sendo extensivamente utilizado.
- Vamos nesta seção definir as noções de ultrafiltro, ultraproduto e provar importantes resultados que estabelecem uma conexão entre ultraprodutos e as propriedades de primeira ordem de modelos.
- Ao mesmo tempo, introduziremos a noção mais geral de construção de produto reduzido.

- Seja I um conjunto não vazio. Lembramos que $S(I)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de I. Um *filtro D sobre I* é definido como um conjunto $D \subset S(I)$ tal que:
  - $I \in D$;
  - Se $X, Y \in D$ então $X \cap Y \in D$;
  - Se $X \in D$ e $X \subset Z \subset I$, então $Z \in D$.
- Observamos que cada filtro D é um conjunto não vazio, uma vez que $I \in D$. Alguns exemplos de filtros são:
  - O *filtro trivial*: $D = \{I\}$.
  - O *filtro impróprio*: $D = S(I)$.
  - Para cada $Y \subset I$, o filtro $D = \{X \subset I : Y \subset X\}$; este filtro é chamado de *filtro principal gerado por Y*.
  - O *filtro de Fréchet*: $D = \{X \in S(I) : I \setminus X \text{ é finito }\}$.
- Dizemos que D é um *filtro próprio* se e somente se não for o filtro impróprio $S(I)$.
- A proposição abaixo mostra como podemos obter um filtro partindo de um subconjunto arbitrário de $S(I)$. Mas antes, segue uma definição:
- Seja E um subconjunto de $S(I)$. O *filtro gerado por E* é a interseção D de todos os filtros sobre I que incluem E:

$$D \quad = \quad \bigcap \{F : E \subset F \quad \text{e} \quad F \text{ é um filtro sobre } I\}.$$

- Dizemos que E tem a *propriedade de interseção finita* se e somente se a interseção de qualquer número finito de elementos de E for não vazia.

4.1.1 Proposição

Seja E um subconjunto qualquer de $S(I)$ e seja D o filtro gerado por E. Então:

1. D é um filtro sobre I.

2. D é o conjunto de todos os $X \in S(I)$ tais que ou $X = I$ ou, para alguns $Y_1, \ldots, Y_n \in E$,
$$Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subset X$$

3. D é um filtro próprio se e somente se E tem a propriedade de interseção finita.

Prova

1. (Exercício **para Entregar**!)

2. Para provar (2), considere:

   - Seja D' o conjunto de todos os $X \in S(I)$ tais que ou $X = I$ ou para alguns $Y_1, \ldots, Y_n \in E$, $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subset X$.
   - Mostraremos que $D' = D$, ou seja, que D' é o filtro gerado por E.
   - Já dissemos que $I \in D'$.
   - Sejam $X, X' \in D'$ e sejam $Y_i, Y'_j \in E$ tais que
   $$Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subset X, \qquad Y'_1 \cap \ldots \cap Y'_m \subset X'$$
   - Se $X \subset Z \subset I$, então
   $$Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subset Z$$
   - Então $Z \in D'$. Além disso,
   $$Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \cap Y'_1 \cap \ldots \cap Y'_m \subset X \cap X'$$
   - Então, $X \cap X' \in D'$. Logo, pela definição de filtro, D' é um filtro sobre I.
   - Obviamente $E \subset D'$ e disso se segue que $D \subset D'$.
   - Agora considere qualquer filtro F sobre I que inclua E.
   - Então $I \in F$, e para quaisquer $Y_1, \ldots, Y_n \in E$, temos $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \in F$.
   - Portanto, qualquer $X \in S(I)$ que inclua $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$ pertence a F. Então, $D' \subset F$.

- Isto mostra que $D' \subset D$ e como já vimos que $D \subset D'$, então $D = D'$.

3. Consequência de (2). Execício **para entregar**! ♦

- Vejamos um exemplo de filtro que será particularmente importante em nosso estudo.
- Seja J um conjunto infinito e seja $I = S_\omega(J)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de J.
- Para cada $j \in J$, seja
$$\widehat{j} = \{i \in I : j \in i\}$$
o conjunto de todos os subconjuntos finitos de J que contém j.
- Agora seja
$$E = \{\widehat{j} : j \in J\}.$$
Então E é um subconjunto de $S(I)$, e podemos formar um filtro D gerado por E.
- Pela Proposição 4.1.1, D é exatamente o conjunto de todos os subconjuntos X de I tais que para algum $i \in I$, todo $i' \in I$ que inclui i, pertence a X.
- Mais ainda. E tem a propriedade de interseção finita (PIF) e, portanto, D é um filtro próprio.
- Vamos agora tratar do conceito de ultrafiltros. *D é um ultrafiltro sobre I* se e somente se D for um filtro sobre I tal que para todo $X \in S(I)$,
$$X \in D \quad \Leftrightarrow \quad (I \setminus X) \notin D$$
- Se dissermos simplesmente que D é um ultrafiltro, então devemos assumr tacitamente que D é um ultrafiltro sobre o conjunto $I = \bigcup D$.

4.1.2 Proposição

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. D é um ultrafiltro sobre I
2. D é um *filtro próprio maximal* sobre I. Ou seja, D é um filtro próprio sobre I e o único filtro próprio sobre I que inclui D é o próprio D.

Prova

$(1) \Rightarrow (2)$

- Hipótese: D é um ultrafiltro.
- Então $\varnothing \notin D$, pois $I \in D$ e $\varnothing = I \smallsetminus I$.
- Logo, D é um filtro próprio, pois $\varnothing \in S(I)$.
- Seja F um filtro próprio qualquer sobre I que inclui D.
- Suponha, por absurdo, que $X \in F$ e $X \notin D$.
- Então, $I \smallsetminus X \in D$.
- Logo, $I \smallsetminus X \in F$.
- Mas então, $\varnothing = X \cap (I \smallsetminus X) \in F$
- Logo, F é filtro impróprio,[4] o que contradiz a hipótese de que F é filtro próprio.
- Portanto descartamos a hipótese do absurdo e concluímos que não há filtro próprio que inclua própriamente D, ou seja, que D é filtro próprio maximal.

$(2) \Rightarrow (1)$

- Hipótese: D é filtro próprio maximal sobre I.
- Considere um conjunto qualquer $X \in S(I)$.
- Não pode ocorrer que $X \in D$ e também que $I \smallsetminus X \in D$, pois se ocorresse, teríamos $\varnothing \in D$ e D não seria filtro próprio.
- Logo, $X \in D \Rightarrow I \smallsetminus X \notin D$.
- Basta, portanto, mostrarmos que $I \smallsetminus X \notin D \Rightarrow X \in D$.
- Suponha, então, que $I \smallsetminus X \notin D$.
- Seja $E = D \cup \{X\}$ e seja F o filtro gerado por E.

[4] Veja exercício 4.1.1

- Considere quaisquer $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ e seja

$$Z = Y_1 \cap \ldots \cap Y_n.$$

- Como D é fechado por intereseções finitas, já que é um filtro, então há duas possibilidades:
  - ou $Z \in D$;
  - ou $Z = Y \cap X$ para algum $Y \in D$.
- No primeiro caso, $Z \neq \varnothing$, pois $\varnothing \notin D$, já que D é filtro próprio.
- No segundo caso, também ocorre que $Z \neq \varnothing$, pois caso contrário teríamos $Y \in D$, e como $Y \cap X = \varnothing$, então $Y \subset I \setminus X$ e como $I \setminus X \subset I$, teríamos $I \setminus X \in D$, que contradiz nossa suposição.
- Portanto, seja qual for o caso, $Z \neq \varnothing$. Portanto, pela Proposição 4.1.1(2) vemos que $\varnothing \notin F$.
- Isso significa que F é um filtro próprio. Como, pela construção de F $D \subset F$, e como, por hipótese, D é filtro maximal, então $D = F$.
- Logo, $E \subset D$ e $X \in D$. ♦

Provaremos agora um importante teorema sobre a existência de ultrafiltros.

4.1.3 Proposição – Teorema dos Ultrafiltros

Se $E \subset S(I)$ e E tem a propriedade de interseção finita, então existe um ultrafiltro D sobre I tal que $E \in D$.

Prova

- Pela Proposição 4.1.1(3), o filtro F gerado por E não contém o $\varnothing$, uma vez que F é filtro próprio.
- Mais ainda, se C é uma cadeia qualquer de filtros próprios sobre I, então $\bigcup C$ é um filtro próprio sobre I.[5]

[5] Esta é uma propriedade derivada diretamente da definição de filtro próprio e deixamos como exercício **para entregar**.

- Além disso, se cada $D \in C$ inclui E, então $\bigcup C$ inclui E.

- Segue-se do Lema de Zorn que a classe $\mathcal{E}$ de todos os filtros próprios sobre I que incluem E tem um elemento maximal, digamos D (4.1.2).

- Então $E \subset D$ e D é um filtro próprio maximal sobre I, porque se D' é um filtro próprio que inclui D, então $E \subset D'$, e então D' pertence a $\mathcal{E}$ e portanto $D' = D$.

- Então, pela Proposição 4.1.2, D é um ultrafiltro sobre I. ♦

4.1.4 Corlolário

Qualquer filtro sobre I pode ser extendido a um ultrafiltro sobre I.

Prova

- Exercício **para entregar** (sugestão: veja o exercício 4.1.1). ♦

Aos Estudantes

Haveria, ainda, uma considerável quantidade de conteúdo até conseguirmos apresentar a definição e os resultados fundamentais sobre ultraprodutos, que os relacionam com os modelos. Não teremos tempo para isso neste semestre, mas eu completarei estas notas com este material e o enviarei a vocês.

Ficaremos, por ora, com a descrição dos exercícios deste tópico que fazem parte de nossa avaliação.

Exercícios para Entregar

- Prova dos Itens (1) e (3) da Proposição 4.1.1

- Prova do Corolário 4.1.4

- Resolver os exercícios 4.1.1 e 4.1.2.