Teorema da Completude para a Lógica Proposicional

Baseado no Capítulo 17 do LPL

Algumas Notações e Definições

- A **notação** F_T designa a parte do sistema F que utiliza apenas as regras de introdução e eliminação para os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\bot$.
- **VALORAÇÃO**: é uma função h que atribui a cada sentença atômica da linguagem um valor T ou F.
    - h é uma função que atribui elementos do conjunto $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ aos elementos do conjunto de todas as sentenças atômicas da linguagem.
    - Dada uma sentenças atômica A qualquer, $h(\mathsf{A})$ denota o valor de verdade (T ou F) que a função h atribui a A.
    - Se imaginarmos uma enorme tabela de verdade, com todas as sentenças atômicas da linguagem em suas colunas de referência, cada h será uma linha desta tabela de verdade.
    - Podemos estender cada h a uma função $\hat{h}$ que atribui valores de verdade (T ou F) a todas as sentenças da linguagem (atômicas ou complexas) da seguinte forma:
        - $\hat{h}(\mathsf{Q}) = h(\mathsf{Q})$ – para todas as sentenças atômicas Q.
        - $\hat{h}(\neg \mathsf{Q}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \hat{h}(\mathsf{Q}) = \mathsf{F}$.
        - $\hat{h}(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \hat{h}(\mathsf{Q}) = \mathsf{T}$ **e** $\hat{h}(\mathsf{R}) = \mathsf{T}$.
        - $\hat{h}(\mathsf{Q} \vee \mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \hat{h}(\mathsf{Q}) = \mathsf{T}$ **ou** $\hat{h}(\mathsf{R}) = \mathsf{T}$.
        - $\hat{h}(\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \hat{h}(\mathsf{Q}) = \mathsf{F}$ **ou** $\hat{h}(\mathsf{R}) = \mathsf{T}$.
        - $\hat{h}(\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \hat{h}(\mathsf{Q}) = \hat{h}(\mathsf{R})$.
    - Note que a extensão $\hat{h}$ de h representa a formalização em linguagem matemática das regras para a construção das tabelas de verdade.
    - Note também que a definição de valoração é indutiva, onde h representa a cláusula básica e $\hat{h}$ as cláusulas indutivas.
- Usaremos a **notação** $\hat{h}(\wedge\Gamma) = \mathsf{T}$ para indicar que a valoração h torna verdadeiras todas as sentenças de Γ.
- Vamos agora utilizar a noção de *valoração* para reapresentar formalmente algumas noções que já conhecemos:
- **TAUTOLOGIA:** S é uma *tautologia* se e somente se, para toda valoração h, $\hat{h}(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$.
- **CONSEQÜÊNCIA TAUTOLÓGICA:** S é *conseqüência tautológica* de um conjunto de sentenças Γ se e somente se toda valoração h que torna verdadeiras todas as sentenças de Γ, também torna S verdadeira.
- Usaremos a **notação** $\Gamma \models_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$ para indicar que S é conseqüência tautológica de Γ, e a notação $\models_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$ para indicar que S é uma tautologia.
    - Com nossas novas notações, as definições de conseqüência tautológica e tautologia ficam:

- conseqüência tautológica: $\Gamma \models_T S \Leftrightarrow \forall h\ (\hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(S) = T)$.
- tautologia: $\models_T S \Leftrightarrow \forall h\ \hat{h}(S) = T$.

- **TT-SATISFATÍVEL:**
  - A sentença S é *tt-satisfatível* se há pelo menos uma valoração h tal que $\hat{h}(S) = T$.
  - O conjunto de sentenças Γ é *tt-satisfatível* se há pelo menos uma valoração h tal que $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T$.
  - Analogamente, dizemos que S é *tt-insatisfatível* quando não há valoração h tal que $\hat{h}(S) = T$.
  - Também analogamente, Γ é *tt-insatisfatível* quando não há valoração h tal que $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T$.
- Antes de partirmos para o Teorema da Completude, vamos enunciar e provar uma proposição sobre os conceitos que acabamos de redefinir.

Proposição 1

S é conseqüência tautológica de Γ ($\Gamma \models_T S$) se e somente se o conjunto $\Gamma \cup \{\neg S\}$ for tt-insatisfatível.

PROVA:

- **(⇒)** Assuma que $\Gamma \models_T S$. (temos que provar que $\Gamma \cup \{\neg S\}$ não é tt-satisfatível (ou seja, é tt-insatisfatível))
- Seja h uma valoração qualquer.
- Como $\Gamma \models_T S$, então, pela definição de conseqüência tautológica, $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(S) = T$.
- Logo, $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(\neg S) = F$. (pela definição de valoração aplicada a $\neg$)
- Portanto, para toda valoração h, $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(\neg S) = F$
- Logo, pela definição de tt-satisfatibilidade, $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é tt-insatisfatível.
- **(⇐)** Assuma que $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é tt-insatisfatível. (temos que provar que $\Gamma \models_T S$).
- Como $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é tt-insatisfatível, então não há valoração h tal que $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T$ e $\hat{h}(\neg S) = T$.
- Assim, para toda valoração h, $\hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(\neg S) = F$.
- Logo, $\forall h\ \hat{h}(\wedge\Gamma) = T \Rightarrow \hat{h}(S) = T$.
- Então, pela definição de conseqüência tautológica, $\Gamma \models_T S$. ♦

- Antes do Teorema da Completude, uma última notação. Usaremos a **notação** $\Gamma \vdash_T S$ para expressar que há uma prova formal da sentença S no sistema F_T cujas premissas são todas sentenças do conjunto Γ.
  - Não estamos assumindo que todas as sentenças de Γ são, de fato, utilizadas na prova. Por exemplo, Γ poderia ser um conjunto infinito de sentenças enquanto que apenas um número finito de suas sentenças pode ser usado em qualquer prova.
  - Note que se $\Gamma \vdash_T S$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então é claro que $\Gamma' \vdash_T S$.

Teorema da Completude Proposicional (Completude de F_T)

Se uma sentença S é *conseqüência tautológica* de um conjunto Γ de sentenças, então $\Gamma \vdash_T S$.

- Antes de provar este teorema, provaremos o seguinte lema, que nos auxiliará na prova principal.

Lema 2. $\Gamma \cup \{\neg S\} \vdash_T \bot$ se e somente se $\Gamma \vdash_T S$.

PROVA:

- **(⇒)** Assuma que $\Gamma \cup \{\neg S\} \vdash_T \bot$, isto é, há uma prova de $\bot$ tendo $\neg S$ e certas sentenças P_1, ..., P_n de Γ como premissas.
- Podemos supor que esta prova tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \neg S \\ \hline \quad \vdots \\ \quad \bot \end{array}$$

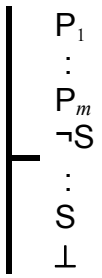
- Note que podemos usar esta prova para construir a seguinte prova de S a partir de P_1, ..., P_n:

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \quad \begin{array}{|l} \neg S \\ \hline \quad \vdots \\ \quad \bot \end{array} \\ \neg\neg S \\ S \end{array}$$

- Esta prova formal mostra, como queríamos, que $\Gamma \vdash_T S$.
- (⇐) Assuma que $\Gamma \vdash_T S$, isto é, há uma prova de S tendo certas sentenças P_1, ..., P_m de Γ como premissas.
- Podemos supor que esta prova tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_m \\ \hline \quad \vdots \\ \quad S \end{array}$$

- Note que podemos utilizar esta prova para, acrescentando $\neg S$ como premissa, produzir a seguinte prova:



- Esta prova formal mostra, como queríamos, que $\Gamma \cup \{\neg S\} \vdash_T \bot$. ♦

DEFINIÇÃO: Conjunto de Sentenças Formalmente Consistente

- Diremos que um conjunto de sentenças Γ é *formalmente consistente* se e somente se $\Gamma \nvdash_T \bot$.
    - Ou seja, Γ é formalmente consistente se e somente se não há prova do $\bot$ em F_T tendo apenas sentenças de Γ como premissas.
- Podemos agora enunciar o seguinte teorema, que é equivalente ao Teorema da Completude:

Teorema da Completude de F_T (Nova Formulação)

Todo conjunto de sentenças formalmente consistente é TT-satisfatível.

- Mas espere um pouco! Qual a ligação das duas formulações do Teorema da Completude? Elas são mesmo equivalentes? São sim, mas antes de prosseguirmos, temos que entender isso em detalhes.
- Vamos relembrar a **Proposição 1** e o **Lema 2** que demonstramos acima.
    - PROP 1: $\Gamma \models_T S \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg S\}$ não é TT-satisfatível.
    - LEMA 2: $\Gamma \vdash_T S \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg S\}$ não é formalmente consistente.
- Reparem como são próximos estes dois resultados. O **Lema 2** é a contrapartida *sintática* da **Prop 1**, que é *semântica*. Eles mostram que em um sistema correto e completo há uma relação bastante forte entre a noção semântica de *satisfatibilidade* e a noção sintática de *consistência formal*.
- Utilizaremos estes resultados para provar que os dois enunciados do Teorema da Completude são, de fato, equivalentes.

Sejam Γ e S, respectivamente, um conjunto de sentenças e uma sentença arbitrários de FOL.

(1) $\Gamma \models_T S \Rightarrow \Gamma \vdash_T S$ ..... (1º enunciado da completude de F_T)

(2) $\Gamma \nvdash_T S \Rightarrow \Gamma \not\models_T S$ ..... (contrapositiva em 1)

(3) $\Gamma \nvdash_T S \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg S\}$ é TT-satisfatível ..... (contrapositiva da **Prop 1** em 2)

(4) $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é form. consistente $\Rightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é tt-satisfatível ..... (contrapositiva do Lema 2 em 3)

(5) Todo conjunto de sentenças formalmente consistente é TT-satisfatível ..... (generalização em 4)[1]

[1] Note que como Γ e S foram escolhidos arbitrariamente, e nenhuma característica específica deles foi utilizada nos passos acima, então, podemos aplicar a generalização universal em (4), obtendo em (5) o segundo enunciado da completude proposicional.

- Repare que (1), o primeiro enunciado da completude é equivalente a (5), o segundo enunciado do Teorema da Completude. A prova acima funciona nos dois sentidos, de cima para baixo e de baixo para cima.
- Antes de apresentar a prova completa da completude proposicional, vamos fazer um esboço dela para facilitar a compreensão. Depois de entendido o esboço, detalharemos todos os passos da prova.

Esboço da Prova do Teorema da Completude Proposicional (de F_T)

- **COMPLETUDE DE CONJUNTOS FORMALMENTE COMPLETOS**
    - Inicialmente provaremos que o teorema é válido para conjuntos formalmente consistentes com uma propriedade adicional conhecida como *completude formal*.
    - Um conjunto Γ é *formalmente completo* se para toda sentença S, ou $\Gamma \vdash_T S$ ou $\Gamma \vdash_T \neg S$.
- **ESTENTENDO CONJUNTOS FORMALMENTE CONSISTENTES A FORMALMENTE COMPLETOS**
    - Tendo provado que todo conjunto formalmente consistente e formalmente completo é tt-satisfatível, provaremos que todo conjunto formalmente consistente pode ser expandido para um conjunto que seja formalmente consistente e formalmente completo.
- **JUNTANDO AS COISAS**
    - O fato de que o conjunto expandido é tt-satisfatível garantirá que o conjunto original também é.
    - Isso porque uma valoração que satisfaça (torne verdadeira todas as sentenças) o conjunto maior, satisfará também o conjunto original, que é um subconjunto do conjunto expandido.
- Vamos agora detalhar estes passos!

PASSO 1: Completude para Conjuntos de Sentenças Formalmente Completos

- Para provar que todo conjunto de sentenças formalmente consistente e formalmente completo é tt-satisfatível, o seguinte lema é crucial.

Lema 3

Seja Γ um conjunto de sentenças formalmente consistente e formalmente completo, e sejam R e S sentenças quaisquer da linguagem:

(1) $\Gamma \vdash_T (R \wedge S) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_T R$ **e** $\Gamma \vdash_T S$

(2) $\Gamma \vdash_T (R \vee S) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_T R$ **ou** $\Gamma \vdash_T S$

(3) $\Gamma \vdash_T \neg S \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \nvdash_T S$

(4) $\Gamma \vdash_T (R \rightarrow S) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \nvdash_T R$ **ou** $\Gamma \vdash_T S$

(5) $\Gamma \vdash_T (R \leftrightarrow S) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma \vdash_T R$ **e** $\Gamma \vdash_T S)$ **ou** $(\Gamma \nvdash_T R$ **e** $\Gamma \nvdash_T S)$

PROVA:

(Item 1⇒)

- Assuma como hipótese que $\Gamma \vdash_T (R \wedge S)$.
- Isto é, há uma prova de $R \wedge S$ tendo certas sentenças P_1, ..., P_n de Γ como premissas.
- Podemos supor que esta prova tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \wedge S \end{array}$$

- Esta prova pode ser transformada facilmente tanto em uma prova de R quanto em uma prova de S, bastando para isso que acrescentemos uma regra $\wedge$Elim ao final. Veja:

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \wedge S \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \wedge S \\ R \end{array} \quad \textbf{e} \quad \begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \wedge S \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \wedge S \\ S \end{array}$$

- E isto completa a prova do Item 1⇒.

(Item 1⇐)

- Assuma como hipótese que $\Gamma \vdash_T R$ e $\Gamma \vdash_T S$.
- Então, há provas de R e S tendo como premissas sentenças de Γ.
- O que temos que fazer é juntar estas duas provas em uma só e aplicar a regra $\wedge$Intro para construir uma prova de $R \wedge S$. Veja como:

Juntando $\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ R \end{array}$ com $\begin{array}{|l} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \\ \vdots \\ S \end{array}$ obtemos $\begin{array}{|l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ S \\ R \wedge S \end{array}$

- Para construir esta prova, basta copiar as duas anteriores em uma só, tomando cuidado de corrigir os índices das sentenças citadas e, ao final, aplicar $\wedge$Intro a R e S.
- E isto finaliza o Item 1⇐.

(Item 2⇒)

- Assuma como hipótese que $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$.
- **(*a*)** Objetivando fazer uma prova por contradição, assuma que $\Gamma \nvdash_T R$ e $\Gamma \nvdash_T S$.
- Como uma das hipóteses do lema é que Γ é formalmente completo, então, de (*a*) se segue que $\Gamma \vdash_T \neg R$ e $\Gamma \vdash_T \neg S$.
- Isso significa que temos duas provas formais p_1 e p_2 tendo sentenças de Γ como premissas tais que p_1 tem $\neg R$ como conclusão e p_2 tem $\neg S$ como conclusão.
- Então, do mesmo modo que fizemos no *Item 1⇐*, podemos juntar p_1 e p_2 em uma única prova p_3 e, ao final, aplicar a regra $\wedge$Intro obtendo como conclusão $\neg R \wedge \neg S$.
- Agora, podemos juntar p_3 com a prova de uma das versões de *DeMorgan* e obter uma nova prova p_4 que tem como conclusão $\neg(R \vee S)$.
- Isso mostra que $\Gamma \vdash_T \neg(R \vee S)$.
- Mas lembre-se que partimos da hipótese inicial que $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$.
- Novamente, se juntarmos essas duas provas, podemos construir uma prova p_5 em que a conclusão é $\perp$, justificada pela regra $\perp$Intro em $\neg(R \vee S)$ e $(R \vee S)$.
- Isto significa que $\Gamma \vdash_T \perp$. Ou seja, Γ é formalmente inconsistente.
- Mas note que isto é uma contradição com a hipótese do lema que assegura que Γ é formalmente consistente.
- Portanto, descartamos a hipótese do absurdo (*a*) e concluímos que $\Gamma \vdash_T R$ ou $\Gamma \vdash_T S$.

(Item 2⇐)

- Assuma como hipótese que $\Gamma \vdash_T R$ ou $\Gamma \vdash_T S$.
- Seja qual for o caso é trivial transformar a prova de R ou de S em uma prova de $R \vee S$. Basta acrescentar a sentença $R \vee S$ justificando-a pela regra $\vee$Intro.

(Outros Itens)

- As provas dos outros itens são similares as dos itens 1 e 2. Deixamo-las como exercícios. ♦

Proposição 4

Todo conjunto de sentenças formalmente consistente e formalmente completo é tt-satisfatível.

PROVA:

- Para provar a *Proposição 4* temos que mostrar que dado um conjunto Γ de sentenças que seja formalmente consistente e formalmente completo, há uma valoração $\hat{h}$ que torna verdadeiras todas as sentenças de Γ.
- Definimos a atribuição de valores de verdade h a sentenças atômicas da linguagem da seguinte forma. Para toda sentença atômica A:

  (0) Se $\Gamma \vdash_T A$ então $h(A) = T$. Caso contrário, $h(A) = F$.

  - Com base em h, a valoração $\hat{h}$ atribui valores de verdade **T** ou **F** para todas as sentenças da linguagem (sejam elas atômicas ou complexas).
- Sobre $\hat{h}$ vamos provar que:

(1) Para toda sentença S, $\hat{h}(S) = T$ *sse* $\Gamma \vdash_T S$.

- Se provarmos (1), então saberemos que $\hat{h}$ torna verdadeiras todas as sentenças prováveis a partir de Γ. Mas é claro que todas as sentenças de Γ são prováveis a partir de Γ (por reiteração!). Portanto provar (1) garante que a valoração $\hat{h}$ torna verdadeiras todas as sentenças de Γ. Logo, sob a hipótese (1), Γ é tt-satisfatível.
- Portanto, para provar a *Proposição 4*, basta provarmos (1).
- **[PROVA de (1)]** - (faremos por indução na definição de *wff*)
- **BASE:** (temos que provar: para toda sentença atômica S, $\hat{h}(S) = T \Leftrightarrow \Gamma \vdash_T S$) – lembre-se que Γ é um conjunto de sentenças formalmente consistente e formalmente completo qualquer.
- Note que o caso básico é garantido pela própria definição de h [proposição (0) acima].
- **PASSO-A-PASSO:**
    - **HI** (Hipótese Indutiva): sejam R e S sentenças (*wffs*) para as quais a proposição (1) é verdadeira. Ou seja: $\hat{h}(S) = T \Leftrightarrow \Gamma \vdash_T S$ **e** $\hat{h}(R) = T \Leftrightarrow \Gamma \vdash_T R$.
    - Temos que provar que (1) também vale para $(R \wedge S)$, $(R \vee S)$, $(R \rightarrow S)$, $(R \leftrightarrow S)$, $\neg R$.
- Todos estes casos se seguem facilmente a partir do *Lema 3*. Consideremos, como exemplo, o caso da disjunção.
- Precisamos provar que $\hat{h}(R \vee S) = T \Leftrightarrow \Gamma \vdash_T (R \vee S)$.
    - **(⇒)** Assuma que $\hat{h}(R \vee S) = T$
    - Então, pela definição de valoração, $\hat{h}(R) = T$ ou $\hat{h}(S) = T$.
    - Se $\hat{h}(R) = T$, por HI sabemos que $\Gamma \vdash_T R$.
    - Então basta acrescentar à prova de R a regra $\vee$Intro para termos uma prova de $(R \vee S)$ a partir de Γ. Logo, temos: $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$.
    - Se $\hat{h}(S) = T$, por HI sabemos que $\Gamma \vdash_T S$ e o caso é análogo ao anterior.
    - Portanto, seja qual for o caso, $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$.
    - **(⇐)** Assuma que $\Gamma \vdash_T (R \vee S)$
    - Pelo *Lema 3* sabemos, então, que $\Gamma \vdash_T R$ ou $\Gamma \vdash_T S$.
    - Se $\Gamma \vdash_T R$, por HI sabemos que $\hat{h}(R) = T$. Logo, pela definição de valoração, $\hat{h}(R \vee S) = T$.
    - Analogamente, se $\Gamma \vdash_T S$, por HI sabemos que $\hat{h}(S) = T$. Logo, pela definição de valoração, $\hat{h}(R \vee S) = T$.
    - Portanto, seja qual for o caso, $\hat{h}(R \vee S) = T$.
- A prova para os outros conectivos [$(R \wedge S)$, $(R \rightarrow S)$, $(R \leftrightarrow S)$, $\neg R$] é análoga e deixamos como exercício. ♦

- Apenas para reforçar o entendimento da prova, relembremos os passos que acabamos de executar:

- Primeiro provamos (na **BASE**) que todas as sentenças atômicas satisfazem a propriedade (1), ou seja, se S é atômica, $\hat{h}(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$ *sse* $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$.
- Depois provamos (no **PASSO INDUTIVO**) que se duas sentenças R e S quaisquer satisfazem a propriedade (1), então todas as sentenças que podem ser construídas a partir delas também satisfazem a propriedade (1). Ou seja, provamos que:
  - Se $[[\hat{h}(\mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{R}]$ e $[\hat{h}(\mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}]$ então:
    - $\hat{h}(\mathsf{R} \vee \mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} (\mathsf{R} \vee \mathsf{S})$.
    - $\hat{h}(\mathsf{R} \wedge \mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} (\mathsf{R} \wedge \mathsf{S})$.
    - $\hat{h}(\mathsf{R} \rightarrow \mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} (\mathsf{R} \rightarrow \mathsf{S})$.
    - $\hat{h}(\mathsf{R} \leftrightarrow \mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} (\mathsf{R} \leftrightarrow \mathsf{S})$.
    - $\hat{h}(\neg\mathsf{R}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} (\neg\mathsf{R})$. (o mesmo para $\neg\mathsf{S}$)
- Como sabemos que todas as sentenças da linguagem de F_{T} ou são atômicas ou são construídas a partir de sentenças atômicas dos modos descritos acima, então nossa prova indutiva garante que TODAS as sentenças da linguagem satisfazem a propriedade (1), o que prova a **Proposição 4**.

PASSO 2: Estendendo conjuntos formalmente consistentes quaisquer a conjuntos formalmente completos.

- Temos agora que descobrir um modo de transformar conjuntos de sentenças formalmente consistentes em conjuntos que sejam ambos: formalmente consistentes e formalmente completos.
- O seguinte lema ajudará bastante nesta tarefa:

Lema 5
Um conjunto Γ de sentenças é formalmente completo *se e somente se* para cada sentença atômica A, $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{A}$ ou $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \neg\mathsf{A}$.

PROVA:

- ($\Rightarrow$) Esta direção da prova é imediata pela definição de conjunto formalmente completo.
  - É claro que se Γ é formalmente completo, então: $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{A}$ ou $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \neg\mathsf{A}$ para qualquer sentença A, em especial para A atômica.
- ($\Leftarrow$) Em primeiro lugar, lembremos que dizer que um conjunto Γ qualquer é formalmente completo é dizer que para qualquer sentença S, $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$ ou $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \neg\mathsf{S}$.
- Vamos então provar este caso por generalização universal. Ou seja. Seja S uma sentença arbitrária qualquer da linguagem de F_{T}, provaremos que $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$ ou $\Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \neg\mathsf{S}$.
- Se escolhermos S arbitrariamente, então, por generalização universal provamos que para cada sentença da linguagem, ou Γ a prova, ou Γ prova sua negação.
- Assim, para terminar a prova da **Proposição 4** temos que provar que:

- se $\Gamma \vdash_T A$ ou $\Gamma \vdash_T \neg A$ para qualquer sentença atômica A, então $\Gamma \vdash_T S$ ou $\Gamma \vdash_T \neg S$ para uma sentença S arbitrariamente escolhida.

- Vamos fazer isso por indução na definição (comprimento) desta sentença S.
- **BASE**: (S é sentença atômica)
  - Sabemos, pela hipótese da volta ($\Leftarrow$) que para qualquer sentença atômica A, $\Gamma \vdash_T A$ ou $\Gamma \vdash_T \neg A$).
  - Portanto, se S é atômica, é claro que $\Gamma \vdash_T S$ ou $\Gamma \vdash_T \neg S$
  - Note que a base da indução é dada na própria hipótese do Lema.
- **PASSO-A-PASSO**: (S é sentença complexa)
  - **HI** (Hipótese Indutiva): para qualquer sentenças P com comprimento menor que S (menos complexa que S), $\Gamma \vdash_T P$ ou $\Gamma \vdash_T \neg P$.
  - Como S é uma sentença complexa, pela definição das sentenças de FOL sabemos que S tem uma das seguintes formas, para algum P e Q: $\neg P$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ ou $(P \leftrightarrow Q)$.
  - Temos então que fazer uma prova por casos, analisando cada possibilidade para a forma de S.
- **Caso 1: S tem a forma $(P \vee Q)$** temos que provar que: $\Gamma \vdash_T (P \vee Q)$ ou $\Gamma \vdash_T \neg(P \vee Q)$.
  - É claro que P e Q são ambas mais curtas que $S \equiv (P \vee Q)$. Portanto, pela hipótese de indução sabemos que: ($\Gamma \vdash_T R$ ou $\Gamma \vdash_T \neg R$) e ($\Gamma \vdash_T S$ ou $\Gamma \vdash_T \neg S$).
  - **Caso 1.1:** ($\Gamma \vdash_T R$ ou $\Gamma \vdash_T S$)
    - Pela adição de uma regra ($\vee$Intro) podemos facilmente transformar uma prova de S ou de R em uma prova de $(R \vee S)$.
  - **Caso 1.2:** ($\Gamma \vdash_T \neg R$ e $\Gamma \vdash_T \neg S$) [2]
    - Aqui podemos juntar as provas de $\neg R$ e $\neg S$ para construir uma prova de $\neg R \wedge \neg S$. Ou seja, temos: $\Gamma \vdash_T \neg R \wedge \neg S$.
    - Novamente, replicando a prova de um dos lados de *DeMorgan*, podemos transformar esta prova de $\neg R \wedge \neg S$ em uma de $\neg(R \vee S)$. Ou seja, temos: $\Gamma \vdash_T \neg(R \vee S)$.
  - Assim, seja qual for o caso, quando S tem a forma $(P \vee Q)$, $\Gamma \vdash_T R \vee S$ ou $\Gamma \vdash_T \neg(R \vee S)$, o que completa a prova do caso 1.
- **Demais Casos:** os demais casos do passo indutivo, para os outros conectivos, são similares a este da disjunção e deixamos como exercício. ♦

[2] Note que os Subcasos 1.1 e 1.2 esgotam todas as possibilidades do Caso 1: $((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

Proposição 6
Todo conjunto formalmente consistente Γ de sentenças pode ser expandido a um conjunto de sentenças formalmente consistente e formalmente completo.

PROVA:

- Considere uma lista $A_1, A_2, A_3, \ldots$, com todas as sentenças atômicas de nossa linguagem, na ordem alfabética.
- Começando com $\Gamma_0 = \Gamma$, vamos percorrer a lista das sentenças atômicas e criar uma lista de conjuntos de sentenças $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, de tal forma que cada Γ_i ou será idêntico a Γ_{i-1} ou será uma expansão de Γ_{i-1} definida da seguinte forma:
    - Sempre que encontrarmos uma sentença atômica A_i tal que $\Gamma_{i-1} \nvdash_T A_i$ e $\Gamma_{i-1} \nvdash_T \neg A_i$, então faça $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{A_i\}$. Caso contrário, faça $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$.
        - Ou seja: se nem A_i nem $\neg A_i$ forem demonstráveis a partir de Γ_{i-1}, então construa Γ_i incluindo A_i em Γ_{i-1}. Caso ou A_i ou $\neg A_i$ seja demonstrável a partir de Γ_{i-1}, então Γ_i será idêntico a Γ_{i-1}.
- Denotemos por Γ_ω o conjunto resultante deste processo de construção da seqüência de conjuntos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ a partir da seqüência de sentenças atômicas $A_1, A_2, A_3, \ldots$
- Note que $\Gamma \subseteq \Gamma_\omega$. Ou seja, Γ_ω é uma expansão de Γ. Vamos provar que Γ_ω é formalmente consistente e formalmente completo, conforme a proposição exige.
- Γ_ω é formalmente completo:
    - Como percorremos todas as sentenças atômicas na construção de Γ_ω, pela forma como Γ_ω foi construído, sabemos que para qualquer sentença atômica A_i, $\Gamma_\omega \vdash_T A_i$ ou $\Gamma_\omega \vdash_T \neg A_i$.
    - Portanto, pelo *Lema 5*, Γ_ω é formalmente completo.
- Γ_ω é formalmente consistente:
    - Suponha, por absurdo, que Γ_ω não seja formalmente consistente. Ou seja, $\Gamma_\omega \vdash_T \bot$.
    - Então, sabemos que existe uma prova de $\bot$ cujas premissas pertencem todas a Γ_ω.
    - Sabemos também, por hipótese da proposição, que Γ é formalmente consistente.
    - Então, não há prova de $\bot$ usando apenas as sentenças de Γ. A prova de $\Gamma_\omega \vdash_T \bot$ certamente usa pelo menos uma sentença atômica A_i acrescentada na construção de Γ_ω.
    - Seja p uma prova para para $\Gamma_\omega \vdash_T \bot$ e A_j a sentença atômica de maior índice (em nossa seqüência) usada como premissa de p.
    - A prova p claramente mostra que também $\Gamma_j \vdash_T \bot$.
    - Pode haver outras provas para $\Gamma_\omega \vdash_T \bot$ que utilizam outras sentenças atômicas como premissas e, portanto, com índice diferente em nossa seqüência, de tal modo que para algum outro $k \neq j$, $\Gamma_k \vdash_T \bot$.
    - No entanto, como Γ é formalmente consistente, há certamente um índice mínimo i ($i > 0$) tal que $\Gamma_i \vdash_T \bot$ e $\Gamma_{i-1} \nvdash_T \bot$.

- Então, Γ_{i-1} é formalmente consistente e Γ_i não é.
- (*) Portanto, $\Gamma_i \neq \Gamma_{i-1}$. Assim, pelo processo de construção descrito acima, sabemos que $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{A_i\}$.
- Como Γ_i não é formalmente consistente, $\Gamma_i \vdash_T \bot$ e, portanto, $\Gamma_{i-1} \cup \{A_i\} \vdash_T \bot$.
- Mas se $\Gamma_{i-1} \cup \{A_i\} \vdash_T \bot$, então, é fácil ver que $\Gamma_{i-1} \cup \{\neg\neg A_i\} \vdash_T \bot$.
- Mas se $\Gamma_{i-1} \cup \{\neg\neg A_i\} \vdash_T \bot$, então, pelo *Lema 2*, $\Gamma_{i-1} \vdash_T \neg A_i$.
- Mas se $\Gamma_{i-1} \vdash_T \neg A_i$, então, pelo processo de construção de Γ_ω $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$, o que é uma contradição com (*) acima, onde vimos que $\Gamma_i \neq \Gamma_{i-1}$.
- Portanto, descartamos a hipótese do absurdo de que Γ_ω não seja formalmente consistente e concluímos que Γ_ω é formalmente consistente.

- Portanto, Γ_ω é formalmente consistente e formalmente completo. ♦

PASSO 3: Juntando as Coisas

- Vamos agora apenas colocar tudo o que fizemos até aqui junto e fazermos a prova do *Teorema da Completude para* F_T.

Teorema da Completude Proposicional (Completude de F_T)

(Enunciado 1) $\Gamma \models_T S \Rightarrow \Gamma \vdash_T S$.

(Enunciado 2) Todo conjunto de sentenças formalmente consistente é TT-satisfatível.

PROVA:

- Faremos a prova do *enunciado 2*, que é uma simples aplicação das proposições 4 e 6 demonstradas acima. Em seguida, faremos também a do *enunciado 1*.

(Enunciado 2)

- Seja Γ um conjunto de sentenças formalmente consistente.
- A *Proposição 6* garante que podemos expandir Γ para um conjunto Γ_ω formalmente consistente e formalmente completo.
- A *Proposição 4* garante que Γ_ω é tt-satisfatível. Mas como $\Gamma \subseteq \Gamma_\omega$, então a mesma valoração que satisfaz Γ_ω também satisfaz Γ.
- Portanto, Γ é tt-satisfatível. ♦

(Enunciado 1)

- Provaremos a contrapositiva do *enunciado 1*: $(\Gamma \nvdash_T S \Rightarrow \Gamma \not\models_T S)$.
- Suponha que $\Gamma \nvdash_T S$.
- Então, pela contrapositiva do *Lema2*, $\Gamma \cup \{\neg S\} \nvdash_T \bot$, ou seja, $\Gamma \cup \{\neg S\}$ é formalmente consistente.
- Assim, pela *Proposição 6*, $\Gamma \cup \{\neg S\}$ pode ser expandido a um conjunto Γ_ω $(\Gamma \cup \{\neg S\} \subseteq \Gamma_\omega)$ formalmente consistente e formalmente completo. Pela *Proposição 4* Γ_ω é tt-satisfatível.

- Como $\Gamma \cup \{\neg S\} \subseteq \Gamma_\omega$ então a mesma valoração h que satisfaz Γ_ω também satisfaz $\Gamma \cup \{\neg S\}$.
- Então h torna todas as sentenças de Γ verdadeiras e S falsa. Na notação formalizada isso é expresso por: $\hat{h}(\wedge\Gamma)=T$ e $\hat{h}(S)=F$.
- Ou seja, $\Gamma \nvDash_T S$. ♦
- Os teoremas da Completude e da Correção, este último provado no *Capítulo 8*, costumam na literatura ser enunciados conjuntamente sob o rótulo de Teorema da Completude, da seguinte forma:

Teorema da Completude Proposicional (Junto com a Correção)

(Enunciado 1) $\Gamma \models_T S \Leftrightarrow \Gamma \vdash_T S$.

(Enunciado 2) Para qualquer conjunto Γ de sentenças, Γ é formalmente consistente *sse* é TT-satisfatível.

- Repare que quando $\Gamma = \varnothing$, um caso particular do *Enunciado 1* do Teorema da Completude é o seguinte teorema, conhecido como *Teorema da Completude Fraca*. Por contraste, o *Enunciado 1* acima do Teorema da Completude proposicional é conhecido como *Completude Forte*.

Teorema da Completude Proposicional Fraca

$\models_T S \Leftrightarrow \vdash_T S$. [Em palavras: S é tautologia se e somente se há uma prova de S sem premissas em F_T.]

COROLÁRIO: Compacidade

- Há um corolário do Teorema da Completude bastante interessante e logicamente importante, conhecido como *Teorema da Compacidade*.

Teorema da Compacidade (para a Lógica Proposicional [F_T])

Seja Γ um conjunto qualquer de sentenças da lógica proposicional. Se todo subconjunto finito de Γ for tt-satisfatível, então o próprio Γ é tt-satisfatível.

PROVA:

- Provaremos a forma contrapositiva do teorema:
    - Se Γ é tt-insatisfatível, então Γ tem um subconjunto finito que também é tt-insatisfatível.
- Assuma, por hipótese, que Γ não é tt-satisfatível (ou seja, Γ é tt-insatisfatível).
- Então, pela contrapositiva do *Teorema da Completude*, Γ não é formalmente consistente.
- Ou seja: $\Gamma \vdash_T \bot$.
- Seja $P_1, ..., P_n$ as premissas de Γ presentes em uma prova de $\bot$.
- Como $P_1, ..., P_n$ são as premissas de uma prova, que é um objeto finito, $\{P_1, ..., P_n\}$ é um conjunto finito.
- Além disso, temos: $\{P_1, ..., P_n\} \vdash_T \bot$, ou seja, $\{P_1, ..., P_n\}$ não é formalmente consistente.

- Logo, pela contrapositiva do *Teorema da Correção* (veremos a prova abaixo), $\{P_1, ..., P_n\}$ é tt-insatisfatível.
- Ou seja, Γ tem um subconjunto finito ($\{P_1, ..., P_n\}$) que não é satisfatível, o que termina a prova do teorema. ♦

APÊNDICE – REAPRESENTANDO O TEOREMA DA CORREÇÃO

Teorema da Correção

(Enunciado 1) $\Gamma \vdash_T S \Rightarrow \Gamma \models_T S$

(Enunciado 2) Todo conjunto de sentenças tt-satisfatível é formalmente consistente.

PROVA:

(Enunciado 1)

Prova: suponha que p seja uma prova de S a partir das premissas $P_1, ..., P_n$, todas em Γ, construída no sistema formal F_T. Vamos mostrar que a seguinte afirmação é verdadeira:

(1) Qualquer sentença que ocorra em qualquer passo na prova p é uma conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo.

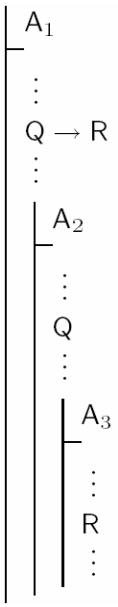
Isto se aplica não apenas às sentenças no nível principal de p, mas também às sentenças que ocorrem nas subprovas, não importando quão profundamente aninhadas elas sejam. As suposições em vigor em um dado passo sempre incluem as premissas principais, mas se estamos lidando com um passo interno a subprovas aninhadas, estão em vigor, também, todas as suposições destas subprovas.

O teorema da correção é conseqüência da afirmação (1) porque se S está no nível principal de p, então as únicas suposições em vigor são as premissas $P_1, ..., P_n$. Logo, S é conseqüência tautológica de $P_1, ..., P_n$.

Para provar a afirmação (1) usaremos o método da prova por absurdo. Suponha (por absurdo) que haja um passo em p contendo uma sentença que não é uma conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo. Chamaremos este de um *passo inválido*. A idéia de nossa prova é olhar para o primeiro passo inválido em p e mostrar que nenhuma das 12 regras de F_T poderia justificá-lo. Em outras palavras, aplicaremos o método da prova por casos para mostrar que haverá uma contradição, seja qual for a regra de F_T tenha sido aplicada para justificar o passo inválido. Isso nos permitirá concluir que nossa suposição (hipótese do absurdo) [de que há um passo em p contendo uma sentença que não é conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo] tem que ser falsa. Logo, não há passos inválidos nas provas de F_T, e, portanto, F_T é correto (S é conseqüência tautológica de $P_1, ..., P_n$).

CASO 1: ($\rightarrow$Elim) Suponha que o primeiro passo inválido justifique a sentença R através de uma aplicação de ($\rightarrow$Elim) às sentenças $Q \rightarrow R$ e Q que ocorrem anteriormente na prova p. Seja $A_1, ..., A_k$ uma lista de todas as suposições em vigor no passo de R. Se este é um passo inválido, R não é conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$. Mas nós mostraremos que isso nos leva a uma contradição.

Uma vez que R é o primeiro passo inválido na prova *p*, sabemos que $Q \rightarrow R$ e Q são ambos passos válidos. Ou seja, são conseqüências tautológicas das suposições em vigor nestes passos. A observação crucial é que, uma vez que $\boldsymbol{F_T}$ nos permite citar sentenças apenas da prova principal ou de subprovas cujas suposições estejam ainda em vigor (subprovas ainda não fechadas), então nós sabemos que todas as suposições em vigor nos passos $Q \rightarrow R$ e Q ainda estão em vigor no passo R. Portanto, as suposições em vigor nestes dois passos estão entre as suposições da lista $A_1, ..., A_k$. Uma ilustração pode ajudar. Suponha que nossa prova tenha a seguinte forma:

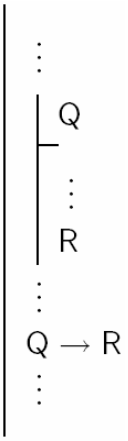


Deve estar claro que as restrições a citações de passos anteriores em provas garantem que todas as suposições em vigor nos passos citados continuam em vigor no passo contendo R. No exemplo mostrado, a suposição A_1 está em vigor no passo contendo $Q \rightarrow R$, as suposições A_1 e A_2 estão em vigor no passo contendo Q, e as suposições A_1, A_2 e A_3 estão em vigor no passo contendo R.

Suponha agora que construamos uma tabela de verdade conjunta para as sentenças $A_1, ..., A_k$, Q, $Q \rightarrow R$ e R. Devido a hipótese que assumimos de que R é um passo inválido (hipótese do absurdo), deve haver uma linha *h* nesta tabela na qual $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras, mas R seja falsa. No entanto, uma vez que Q e $Q \rightarrow R$ são conseqüências tautológicas de $A_1, ..., A_k$, ambas estas sentenças são verdadeiras na linha *h*. Mas isto contradiz a tabela de verdade para $\rightarrow$, pois sabemos que se Q e $Q \rightarrow R$ são verdadeiras, não é possível que R seja falsa (Q verdadeira e R falsa tornariam $Q \rightarrow R$ falsa !!)

Ou seja, chegamos a uma contradição. Logo, não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja a regra ($\rightarrow$Elim). Para terminar a prova temos que fazer casos semelhantes para todas as outras 11 regras formais de $\boldsymbol{F_T}$. Não faremos isso. Provaremos mais dois casos e deixaremos os demais como exercício.

CASO 2: ($\rightarrow$Intro) Suponha que o primeiro passo inválido derive a sentença $Q \rightarrow R$ a partir de uma aplicação da regra ($\rightarrow$Intro) citando uma subprova anterior cuja suposição é Q e a conclusão é R.



Novamente, considere $A_1, ..., A_k$ como as suposições em vigor no passo $Q \rightarrow R$. Note que as suposições em vigor no passo R são $A_1, ..., A_k$ e Q. Uma vez que o passo R ocorre antes do primeiro passo inválido, (*a*) R deve ser uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$ e Q.

Suponha que tenhamos construído uma tabela de verdade conjunta para as sentenças $A_1, ..., A_k$, Q, $Q \rightarrow R$ e R. Como $Q \rightarrow R$ é o primeiro passo inválido na prova p, ele não é conseqüência tautológica das suposições em vigor. Portanto, deve haver uma linha *h* nesta tabela onde $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras, mas $Q \rightarrow R$ seja falsa. Como $Q \rightarrow R$ é falsa nesta linha, então Q tem que ser verdadeira e R falsa. Mas isto contradiz nossa observação (*a*) do parágrafo acima, de que R é uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$ e Q. Novamente, não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja a regra (→Intro).

CASO 3: (⊥Elim) Suponha que o primeiro passo inválido em *p* derive a sentença Q a partir de ⊥. Uma vez que este é o primeiro passo inválido, ⊥ deve ser uma conseqüência tautológica das suposições em vigor no passo de ⊥. Devido às mesmas considerações feitas no primeiro caso, as suposições em vigor par ⊥ continuam em vigor para Q. Então, como ⊥ ocorre antes do primeiro passo inválido, ⊥ é uma conseqüência tautológica das suposições $A_1, ..., A_k$ em vigor no passo Q. Mas isso só ocorre se $A_1, ..., A_k$ forem TT-contraditórias. Em outras palavras, não nenhuma linha em uma tabela de verdade conjunta para $A_1, ..., A_k$ em que $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras. Mas então, Q é vacuamente uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$. E isso contradiz a suposição do caso 3, de que Q é o primeiro passo inválido de *p*. Portanto, também não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja (⊥Elim).

CASOS das demais regras: Vimos três 3 casos das 12 regras. Os demais casos são similares a estes e, portanto, deixamo-los como exercícios.

Como em todos os 12 casos uma contradição é demonstrada, podemos concluir que nossa suposição original (hipótese do absurdo), de que é possível uma prova em F_T conter um passo inválido deve ser falsa. Isto finaliza a prova da correção. ♦

(Enunciado 2)

- Vamos provar a contrapositiva do *Enunciado 2*: todo conjunto formalmente inconsistente é tt-insatisfatível.
- Seja Γ um conjunto de sentenças formalmente inconsistente.

- Então, $\Gamma \vdash_T \bot$.
- Seja p_1 uma prova de $\bot$ a partir de premissas de Γ.
- Dada uma sentença S qualquer, é fácil transformar p_1 em duas provas diferentes, p_2 e p_3, de S e $\neg S$ respectivamente, bastando para isso utilizarmos a regra $\bot$Elim para em p_2 concluir S e em p_3 concluir $\neg S$.
- Então temos: $\Gamma \vdash_T S$ e $\Gamma \vdash_T \neg S$.
- (***a***) Assim, pelo *Enunciado 1* do Teorema da Correção temos: $\Gamma \models_T S$ e $\Gamma \models_T \neg S$.
- (***b***) Suponha agora, por absurdo, que Γ seja tt-satisfatível.
- Seja h uma valoração que satisfaz Γ
- Por (*a*) sabemos que $\hat{h}(S) = T$ e $\hat{h}(\neg S) = T$, o que é uma contradição com a definição de valoração.
- Logo, descartamos a hipótese do absurdo (*b*) e concluímos que Γ é tt-insatisfatível. ♦

Teorema da Correção

(Enunciado 1) $\Gamma \vdash_T S \Rightarrow \Gamma \models_T S$

(Enunciado 2) Todo conjunto de sentenças tt-satisfatível é formalmente consistente.

PROVA:

(Enunciado 1)

Prova: suponha que p seja uma prova de S a partir das premissas $P_1, \ldots, P_n$, todas em Γ, construída no sistema formal F_T. Vamos mostrar que a seguinte afirmação é verdadeira:

(1) Qualquer sentença que ocorra em qualquer passo na prova p é uma conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo.

Isto se aplica não apenas às sentenças no nível principal de p, mas também às sentenças que ocorrem nas subprovas, não importando quão profundamente aninhadas elas sejam. As suposições em vigor em um dado passo sempre incluem as premissas principais, mas se estamos lidando com um passo interno a subprovas aninhadas, estão em vigor, também, todas as suposições destas subprovas.

O teorema da correção é conseqüência da afirmação (1) porque se S está no nível principal de p, então as únicas suposições em vigor são as premissas $P_1, \ldots, P_n$. Logo, S é conseqüência tautológica de $P_1, \ldots, P_n$.

Além disso, se $\{P_1,\ldots, P_n\} \subseteq \Gamma$, então é claro que se $\{P_1,\ldots, P_n\} \models_T S$ então $\Gamma \models_T S$.

Portanto, para provar o *Teorema da Correção* basta provar (1).

Faremos a prova de (1) por indução no comprimento da prova p de $\{P_1,\ldots,P_n\} \vdash_T S$.

BASE: a prova p de $\{P_1,\ldots,P_n\} \vdash_T S$ tem 1 linha. Isso significa que n é 1 e P_1 é S.

- Neste caso, $S \in \Gamma$. Logo, é claro que $\Gamma \models_T S$.

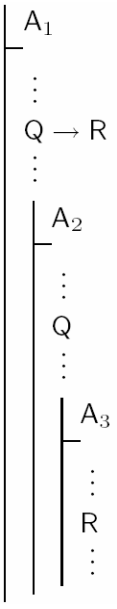
PASSO: prova p de $\{P_1,\ldots,P_n\} \vdash_T S$ tem k linhas.

- Para qualquer prova com menos do que *k* linhas

  Para provar a afirmação (1) usaremos o método da prova por absurdo. Suponha (por absurdo) que haja um passo em *p* contendo uma sentença que não é uma conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo. Chamaremos este de um *passo inválido*. A idéia de nossa prova é olhar para o primeiro passo inválido em *p* e mostrar que nenhuma das 12 regras de F_T poderia justificá-lo. Em outras palavras, aplicaremos o método da prova por casos para mostrar que haverá uma contradição, seja qual for a regra de F_T tenha sido aplicada para justificar o passo inválido. Isso nos permitirá concluir que nossa suposição (hipótese do absurdo) [de que há um passo em *p* contendo uma sentença que não é conseqüência tautológica das suposições em vigor naquele passo] tem que ser falsa. Logo, não há passos inválidos nas provas de F_T, e, portanto, F_T é correto (S é conseqüência tautológica de $P_1, ..., P_n$).

CASO 1: ($\rightarrow$Elim) Suponha que o primeiro passo inválido justifique a sentença R através de uma aplicação de ($\rightarrow$Elim) às sentenças $Q \rightarrow R$ e Q que ocorrem anteriormente na prova *p*. Seja $A_1, ..., A_k$ uma lista de todas as suposições em vigor no passo de R. Se este é um passo inválido, R não é conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$. Mas nós mostraremos que isso nos leva a uma contradição.

Uma vez que R é o primeiro passo inválido na prova *p*, sabemos que $Q \rightarrow R$ e Q são ambos passos válidos. Ou seja, são conseqüências tautológicas das suposições em vigor nestes passos. A observação crucial é que, uma vez que F_T nos permite citar sentenças apenas da prova principal ou de subprovas cujas suposições estejam ainda em vigor (subprovas ainda não fechadas), então nós sabemos que todas as suposições em vigor nos passos $Q \rightarrow R$ e Q ainda estão em vigor no passo R. Portanto, as suposições em vigor nestes dois passos estão entre as suposições da lista $A_1, ..., A_k$. Uma ilustração pode ajudar. Suponha que nossa prova tenha a seguinte forma:



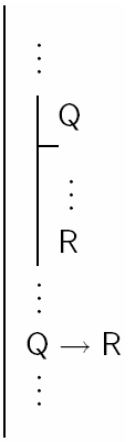
Deve estar claro que as restrições a citações de passos anteriores em provas garantem que todas as suposições em vigor nos passos citados continuam em vigor no passo contendo R. No exemplo mostrado, a suposição A_1 está em vigor no passo contendo $Q \rightarrow R$, as suposições A_1 e A_2 estão em vigor no passo contendo Q, e as suposições A_1, A_2 e A_3 estão em vigor no passo contendo R.

Suponha agora que construamos uma tabela de verdade conjunta para as sentenças $A_1, ..., A_k$, Q,

$Q \rightarrow R$ e R. Devido a hipótese que assumimos de que R é um passo inválido (hipótese do absurdo), deve haver uma linha *h* nesta tabela na qual $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras, mas R seja falsa. No entanto, uma vez que Q e $Q \rightarrow R$ são conseqüências tautológicas de $A_1, ..., A_k$, ambas estas sentenças são verdadeiras na linha *h*. Mas isto contradiz a tabela de verdade para $\rightarrow$, pois sabemos que se Q e $Q \rightarrow R$ são verdadeiras, não é possível que R seja falsa (Q verdadeira e R falsa tornariam $Q \rightarrow R$ falsa !!)

Ou seja, chegamos a uma contradição. Logo, não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja a regra (→Elim). Para terminar a prova temos que fazer casos semelhantes para todas as outras 11 regras formais de $\boldsymbol{F_T}$. Não faremos isso. Provaremos mais dois casos e deixaremos os demais como exercício.

CASO 2: (→Intro) Suponha que o primeiro passo inválido derive a sentença $Q \rightarrow R$ a partir de uma aplicação da regra (→Intro) citando uma subprova anterior cuja suposição é Q e a conclusão é R.



Novamente, considere $A_1, ..., A_k$ como as suposições em vigor no passo $Q \rightarrow R$. Note que as suposições em vigor no passo R são $A_1, ..., A_k$ e Q. Uma vez que o passo R ocorre antes do primeiro passo inválido, (*a*) R deve ser uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$ e Q.

Suponha que tenhamos construído uma tabela de verdade conjunta para as sentenças $A_1, ..., A_k$, Q, $Q \rightarrow R$ e R. Como $Q \rightarrow R$ é o primeiro passo inválido na prova p, ele não é conseqüência tautológica das suposições em vigor. Portanto, deve haver uma linha *h* nesta tabela onde $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras, mas $Q \rightarrow R$ seja falsa. Como $Q \rightarrow R$ é falsa nesta linha, então Q tem que ser verdadeira e R falsa. Mas isto contradiz nossa observação (*a*) do parágrafo acima, de que R é uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$ e Q. Novamente, não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja a regra (→Intro).

CASO 3: (⊥Elim) Suponha que o primeiro passo inválido em *p* derive a sentença Q a partir de ⊥. Uma vez que este é o primeiro passo inválido, ⊥ deve ser uma conseqüência tautológica das suposições em vigor no passo de ⊥. Devido às mesmas considerações feitas no primeiro caso, as suposições em vigor par ⊥ continuam em vigor para Q. Então, como ⊥ ocorre antes do primeiro passo inválido, ⊥ é uma conseqüência tautológica das suposições $A_1, ..., A_k$ em vigor no passo Q. Mas isso só ocorre se $A_1, ..., A_k$ forem TT-contraditórias. Em outras palavras, não nenhuma linha em uma tabela de verdade conjunta para $A_1, ..., A_k$ em que $A_1, ..., A_k$ sejam todas verdadeiras. Mas então, Q é vacuamente uma conseqüência tautológica de $A_1, ..., A_k$. E

isso contradiz a suposição do caso 3, de que Q é o primeiro passo inválido de *p*. Portanto, também não é possível que a regra que justifique o primeiro passo inválido de uma prova *p* seja ($\perp$Elim).

CASOS das demais regras: Vimos três 3 casos das 12 regras. Os demais casos são similares a estes e, portanto, deixamo-los como exercícios.

Como em todos os 12 casos uma contradição é demonstrada, podemos concluir que nossa suposição original (hipótese do absurdo), de que é possível uma prova em F_T conter um passo inválido deve ser falsa. Isto finaliza a prova da correção. ♦

Teorema da Correção para a Lógica de Primeira Ordem

Baseado no Capítulo 18.3 do LPL

Algumas Notações e Definições

- Dado um conjunto Γ de sentenças, a notação $\Gamma \vdash S$ indica que há uma prova de S a partir de premissas em Γ no sistema ***F*** completo.
    - Como para o caso do símbolo "$\vdash_T$", a notação $\Gamma \vdash S$ não implica que todas as sentenças de Γ devam ser usadas na prova, mas apenas que há uma prova de S na qual todas as suas premissas pertencem a Γ.

Proposição 1

Sejam $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ estruturas com o mesmo domínio e cujas extensões de predicados e nomeações de constantes que ocorrem em uma *wff* qualquer P coincidem. Sejam g_1 e g_2 atribuições de variáveis que, para as variáveis livres que ocorrem em P atribuem os mesmos objetos. Então:

$\mathfrak{M}_1 \models P$ se e somente se $\mathfrak{M}_2 \models P$.

Prova – feita por indução no comprimento da *wff* P, é um bom exercício para você verificar se entendeu bem a definição de satisfação. ♦ Claro que fica como exercício ☹

Teorema da Correção de *F*

Se $\Gamma \vdash S$, então S é uma conseqüência de primeira ordem do conjunto Γ.

Prova

- A prova é bastante parecida com a prova da correção de F_T (o sistema F restrito às regras proposicionais).
- Provaremos a seguinte afirmação que, veremos, implica o Teorema da Correção.
    - (1) Qualquer sentença que ocorra em qualquer passo de uma prova p em F é uma conseqüência de primeira ordem das hipóteses em vigor naquele passo.
- Como p é uma prova de S, então S ocorre no nível principal de p, portanto, as suposições em vigor no passo de sua obtenção são apenas as *premissas* da prova p, todas pertencentes a Γ.
- Além disso, como o conjunto das premissas de p é subconjunto de Γ, então é claro que *todas as estruturas que tornam todas as sentenças de Γ verdadeiras*, tornam todas as premissas de p verdadeiras e, pela afirmação (1), *também tornam S verdadeira*. Portanto se provarmos a afirmação (1), provamos também que S é conseqüência de primeira-ordem de Γ.
- Chamemos um passo qualquer em uma prova de *válido* se a sentença deste passo for uma conseqüência de primeira ordem das suposições em vigor neste passo.
- Provaremos a afirmação (1), ou seja, que todos os passos da prova p são válidos, por indução no número n de passos de p.

Base: ($n = 1$) – seja R a sentença do passo 1 da prova p.

- Neste caso, ou R é uma premissa, ou se p é uma prova sem premissas, R é a suposição de uma subprova.

- Em qualquer um destes dois casos, a única suposição em vigor no passo 1 é a própria sentença R e, claramente, R é conseqüência de primeira ordem de R.[1] Logo o passo 1 é válido.

Passo Indutivo: ($n > 1$) – Seja $A_1, ..., A_k$ a lista de todas as suposições em vigor no passo n.

- **Hipótese Indutiva**: Todos os passos anteriores a n são válidos, ou seja, as sentenças derivadas nestes passos são conseqüência de primeira ordem das suposições em vigor nestes passos.
- Seja R a sentença derivada no passo n. Sabemos que R foi derivada por alguma das 20 regras do sistema F completo. Em outras palavras, ou R foi derivada pela regra $(= \text{Intro})$, ou $(= \text{Elim})$, ou $(\wedge\text{Intro})$, ...
    - Ou seja, temos 20 casos para analisar. Cada um representando uma das possíveis regras utilizadas para derivar R na prova p.
    - Para cada um destes casos vamos provar que R é conseqüência de primeira ordem das suposições $(A_1, ..., A_k)$ em vigor no passo n da prova p.
- Para os casos das regras proposicionais (de F_T) a prova é igual aos casos da prova de correção de F_T. A diferença são os casos das regras $(= \text{Intro})$, $(= \text{Elim})$, $(\forall\text{Intro1})$, $(\forall\text{Intro2})$, $(\forall\text{Elim})$, $(\exists\text{Intro})$, $(\exists\text{Elim})$.
- Vamos, no entanto, apresentar também um dos casos proposicionais, apenas para mostrar a similaridade com a prova da correção de F_T.
- **CASO 1**: $(\rightarrow\text{Elim})$
    - Suponha que no passo n da prova p, a sentença R é obtida através de aplicação de $(\rightarrow\text{Elim})$ às sentenças $Q \rightarrow R$ e Q, que aparecem em passos anteriores j e k ($j < n$ e $k < n$) de p.
    - Lembre-se que $A_1, ..., A_k$ é a lista de suposições em vigor no passo n.
    - Pela Hipótese de Indução (*HI*) sabemos que tanto $Q \rightarrow R$ quanto Q são ambas obtidas em passos *válidos* e, portanto, são conseqüências de primeira ordem das suposições em vigor nestes passos.
    - Além disso, como F permite que citemos apenas as sentenças da prova principal ou em subprovas cujas suposições continuem em vigor (subprovas ainda não finalizadas), então sabemos que todas as suposições em vigor nos passos de $Q \rightarrow R$ e Q ainda estão em vigor no passo de R.
        - Isso porque se é permitido que no passo de R citemos $Q \rightarrow R$ e Q, então é porque elas não estão em nenhuma subprova que já tenha sido fechada antes do passo de R. Por isso, não há suposições em vigor nos passos de $Q \rightarrow R$ e Q que não esteja em vigor também no passo de R.
    - Portanto, as suposições em vigor para os passos de $Q \rightarrow R$ e Q estão entre $A_1, ..., A_k$.
    - Logo, *HI* garante que ambas as sentenças $Q \rightarrow R$ e Q são conseqüências de primeira ordem de $A_1, ..., A_k$. Mostraremos que isto implica que R também é conseqüência de $A_1, ..., A_k$.

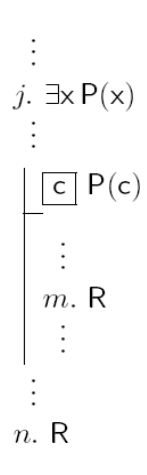
[1] Afinal de contas, é obvio que qualquer estrutura que torne R verdadeira torna R verdadeira.

- Suponha que $\mathfrak{M}$ seja uma estrutura de primeira ordem na qual todas as sentenças $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ são verdadeiras.
- Como $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ e Q são conseqüências de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$, então sabemos que $\mathfrak{M} \models \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ e $\mathfrak{M} \models \mathsf{Q}$.
- Estamos então na situação em que na estrutura $\mathfrak{M}$, tanto $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ quanto Q são verdadeiras e, portanto, a atribuição $g_\varnothing$ satisfaz tanto $\mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}$ quanto Q em $\mathfrak{M}$:

  (*a*) $\mathfrak{M} \models \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}[g_\varnothing]$ e $\mathfrak{M} \models \mathsf{Q}[g_\varnothing]$.
- Mas pela definição de satisfação:

  (*b*) $\mathfrak{M} \models \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}[g_\varnothing]$ se e somente se $\mathfrak{M} \not\models \mathsf{Q}[g_\varnothing]$ ou $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}[g_\varnothing]$.
- Logo, por (*a*) e (*b*) só pode ser o caso que $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}[g_\varnothing]$ e, portanto, $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}$.
- *Recapitulando*: tomamos $\mathfrak{M}$, uma estrutura qualquer que torna $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ verdadeiras, e mostramos que $\mathfrak{M}$ também torna R verdadeira.
- Ou seja, provamos, por generalização universal, que qualquer estrutura que torna $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ verdadeiras torna também R verdadeira. Em outras palavras, provamos que R é conseqüência de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ e, portanto, *n* é um passo válido. E isso termina o CASO 1.
- As provas de todas as outras regras proposicionais (vero-funcionais) são similares a esta e deixamos como exercício. ☹

- **<u>CASO 2</u>**: (∃Elim)
  - Suponha que no passo *n* da prova *p*, a sentença R é obtida através de aplicação de (∃Elim) à sentença $\exists x \mathsf{P}(x)$ e a uma subprova que tem R no seu nível principal (geralmente como sua conclusão) no passo *m* (< *n*).
  - Seja *c* a constante nova introduzida na subprova em que se obtém R. Então, pela definição da regra (∃Elim), $\mathsf{P}(c)$ é a suposição da subprova em que R ocorre:



  - Sejam $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ as suposições em vigor no passo *n*.
  - *HI* garante que os passos *j* e *m* são válidos e, portanto:

    (*c*) $\exists x \mathsf{P}(x)$ é uma conseqüência de primeira ordem das suposições em vigor no passo *j*, sendo que estas suposições são subconjunto de $\{\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k\}$;

        - R é conseqüência de primeira ordem das suposições em vigor no passo m, que são um subconjunto de $\{\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k\}$ acrescido da sentença $\mathsf{P}(c)$.
    - Lembre-se que queremos provar que o passo n é válido, ou seja, que R é conseqüência de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ sozinhos (sem $\mathsf{P}(c)$).
    - Suponha que $\mathfrak{M}$ seja uma estrutura de primeira ordem na qual todas as sentenças $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ são verdadeiras. Note, por (c), que $\mathfrak{M} \models \exists x \mathsf{P}(x)$.
    - Da mesma forma que no caso anterior, para mostrar que R é conseqüência de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$, basta mostrar que R também é verdadeira em $\mathfrak{M}$.
    - Note que, pela restrição de aplicação da regra $(\exists\mathsf{Elim})$, a constante c não pode ocorrer em $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$, $\exists x \mathsf{P}(x)$ nem em R.
    - Como $\mathfrak{M} \models \exists x \mathsf{P}(x)$, pela definição de satisfação, sabemos que existe um objeto b em $D^{\mathfrak{M}}$ que satisfaz $\mathsf{P}(x)$.
    - Seja $\mathfrak{M}'$ uma estrutura exatamente como $\mathfrak{M}$, exceto que $\mathfrak{M}'$ atribui o objeto b à constante c. Ou seja, $\mathfrak{M}'(c) = b$.
    - Claramente, pelos dois tópicos acima, $\mathfrak{M}' \models \mathsf{P}(c)$, uma vez que em $\mathfrak{M}'$ escolhemos b como a denotação da constante c.
    - Note que, pela **Proposição 1**, $\mathfrak{M}'$ também torna verdadeiras $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$, já que difere de $\mathfrak{M}$ apenas na denotação da constante c, que não ocorre nestas sentenças.
    - Como vimos que R é conseqüência de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k, \mathsf{P}(c)$, então pelos dois passos anteriores é claro que $\mathfrak{M}' \models \mathsf{R}$.
    - Como c não ocorre também em R, então, novamente pela **Proposição 1**, $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}$.
    - Logo, provamos que qualquer estrutura $\mathfrak{M}$, tal que $\mathfrak{M} \models \mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$ implica que $\mathfrak{M} \models \mathsf{R}$. Portanto, R é conseqüência de primeira ordem de $\mathsf{A}_1, ..., \mathsf{A}_k$. Ou seja, n, o passo da prova p em que obtemos R, é um passo válido. E isto termia a prova deste caso.
- Os casos $(\forall\mathsf{Intro})$ são muito parecidos com $(\exists\mathsf{Elim})$ e os demais, são muito mais simples. Todos eles deixamos como exercícios. ♦ ☹

Teorema da Completude para a Lógica de 1ª Ordem

Baseado no Capítulo 19 do LPL

Apresentaremos uma demonstração detalhada do Teorema da Completude para a Lógica Clássica de Primeira Ordem, baseada no método de Henkin e adaptada para o Sistema de Dedução Natural ***F*** para a Lógica Clássica de Primeira Ordem apresentado no livro "Language Proof and Logic" de Barwise e Etchemendy.

Teorema da Completude Seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira ordem *L* e seja S uma sentença da mesma linguagem *L*. Se S é conseqüência de primeira ordem de Γ ($\Gamma \models \mathsf{S}$) então há uma prova de S cujas premissas são sentenças de Γ ($\Gamma \vdash \mathsf{S}$).

- A idéia da prova é simples. Consiste em uma maneira engenhosa de estender a prova da completude proposicional para primeira ordem. Isso é feito através da utilização de uma determinada teoria $\mathcal{H}$ definida sobre uma linguagem enriquecida com infinitas novas constantes.
- Da completude proposicional sabemos que $\Gamma \models_{\mathsf{T}} \mathsf{S} \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$. Com a Teoria $\mathcal{H}$, mostraremos que $\Gamma \models \mathsf{S} \Rightarrow \mathcal{H} \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$. Ou seja, $\mathcal{H}$ é uma teoria forte o suficiente para tornar possível produzirmos provas proposicionais de todos os argumentos válidos em primeira ordem, quando tomamos sentenças de $\mathcal{H}$ como premissas.
- Então provaremos que $\mathcal{H}$ é fraca o suficiente para que suas sentenças possam ser eliminadas das premissas de qualquer prova de $\mathcal{H} \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$, substituindo-as por regras de primeira ordem. Assim, $\mathcal{H} \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathsf{S}$.
- Então teremos $\Gamma \models \mathsf{S} \Rightarrow \mathcal{H} \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathsf{S}$. E este será o caminho que adotaremos para provar a completude.

Antes de iniciarmos a prova propriamente dita, vejamos um esboço deste método de prova que será detalhadamente desenvolvido na seqüência.

Esboço dos Principais Passos da Prova

(1) Adição das Constantes Testemunhas: dada uma linguagem de primeira ordem *L*, construiremos uma linguagem L_H que possui uma quantidade infinita (enumerável) de novas constantes, cada uma delas relacionada a cada uma das *wff* com uma variável livre $\mathsf{P}(x)$. São as constantes testemunhas de Henkin.

(2) Criação da Teoria de Henkin $\mathcal{H}$: consideraremos $\mathcal{H}$ um conjunto com as seguintes sentenças:

(a) Certas sentenças que sejam validas em 1ª ordem, mas não sejam tautologias;

(b) Para cada nova constante c que é testemunha de Henkin de $\mathsf{P}(x)$, a sentença $\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c)$ será sentença de $\mathcal{H}$.

(3) Teorema da Eliminação: Se p é uma prova cujas premissas incluem sentenças de $\mathcal{H}$ e cuja conclusão S é uma sentença restrita à linguagem original *L* (ou seja, em S não ocorre

nenhuma constante testemunha de Henkin). Então podemos retirar de p todas as premissas que são sentenças de $\mathcal{H}$, transformando p em uma prova de S que não depende de $\mathcal{H}$.

(4) Construção de Henkin: Para qualquer valoração h que torne verdadeira todas as sentenças de $\mathcal{H}$ (ou seja $h(\wedge\mathcal{H}) = \mathsf{T}$) existe uma estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}_h$ tal que $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$ para cada sentença S tal que $h(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$. Esta construção da estrutura $\mathfrak{M}_h$ é chamada de *construção de Henkin*.

Vamos agora mostrar um esboço de como estes 4 passos serão usados na prova da completude de primeira ordem. Ao final, detalharemos esta prova.

Juntando as Coisas

- Suponha que $\Gamma \models \mathsf{S}$. Neste caso, não existe estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\mathsf{S}\}$. Portanto, também não existe estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\mathsf{S}\} \cup \mathcal{H}$.
- Assim, pelo passo 4, não existe valoração h tal que $h(\wedge\Gamma \cup \{\neg\mathsf{S}\} \cup \mathcal{H}) = \mathsf{T}$.
- Logo, para toda valoração h, se $h(\wedge\Gamma\cup\mathcal{H}) = \mathsf{T}$ então $h(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$.
- Então, pela definição de conseqüência tautológica, $\Gamma\cup\mathcal{H} \models_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$ e pela Completude Proposicional, $\Gamma\cup\mathcal{H} \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$.
- Seja p uma prova para a dedução $\Gamma\cup\mathcal{H} \vdash_{\mathsf{T}} \mathsf{S}$. O Teorema da Eliminação (Passo 3 acima) assegura que podemos transformar p em uma prova p' de $\Gamma \vdash \mathsf{S}$.
- Portanto, provamos $\Gamma \models \mathsf{S} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathsf{S}$. ♦

Mas tudo isso foi apenas um esboço. Portanto, não se preocupe se algo escapou à sua compreensão, pois vamos agora detalhar cada um dos 4 passos esboçados acima e a maneira de juntá-los na prova da completude. Quando você tiver terminado a leitura e os exercícios, volte ao início para recuperar a visão geral da prova e consolidar a sua compreensão!! ☺

(1) Adição de Constantes TESTEMUNHAS

- Para cada *wff* P da linguagem de primeira ordem L com exatamente uma variável livre, adicionamos um símbolo de constante individual c_{P}.
    - É preciso certificar-se de que diferentes *wff* sempre são relacionadas com símbolos de constantes diferentes.
    - Esta constante c_{P} será chamada de *constante testemunha* para P.

EXEMPLOS – na linguagem nova L' podemos dizer coisas como:

1. $\exists x\,(\mathsf{Small}(x) \wedge \mathsf{Cube}(x)) \rightarrow \mathsf{Small}(c_1) \wedge \mathsf{Cube}(c_1)$
2. $\exists z\,(z \neq a \wedge z \neq b) \rightarrow (c_2 \neq a \wedge c_2 \neq b)$
3. $\exists y\,\mathsf{Between}(y, a, b) \rightarrow \mathsf{Between}(c_3, a, b)$
4. $\exists x\,\exists y\,\mathsf{Between}(a, x, y) \rightarrow \exists y\,\mathsf{Between}(a, c_4, y)$

PERGUNTA: Como construímos estas constantes novas? Como as escrevemos e como nos certificamos de que diferentes *wff* recebem constantes distintas?

- Uma das possíveis respostas é tomarmos um símbolo c não presente na linguagem original L e colocarmos como subíndice de c a própria *wff* da qual a nova constante será testemunha. Assim, no exemplo 1 acima, c_1 seria, na verdade, o símbolo

$$c_{(\mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{Cube}(x))}$$

- A linguagem L' consistiria de todos os símbolos de L adicionados a todas estas novas constantes testemunhas.
- Podemos agora utilizar estas novas constantes para escrever *wff*s na nova linguagem L', tais como:

$$\mathrm{Smaller}(a, c_{\mathrm{Between}(x,a,b)})$$

- Mas então, em L' podemos ter sentenças com a seguinte forma:

$$\exists x\ \mathrm{Smaller}(x, c_{\mathrm{Between}(x,a,b)})$$

- Assim, a princípio, poderíamos ter um símbolo de constante testemunha para a *wff* acima (sem o quantificador existencial), que seria um c, com o seguinte subscrito:

$$\mathrm{Smaller}(x, c_{\mathrm{Between}(x,a,b)})$$

- Infelizmente, esta *wff* não faz parte da linguagem original L, mas apenas de L', pois possui um símbolo de constante testemunha. Portanto uma constante c com a *wff* acima como seu subíndice não faz parte da linguagem L'.
- Como resolver este problema?

A Linguagem L_H

- Precisamos reiterar esta construção várias vezes. Iniciando com uma linguagem L, definimos uma seqüência infinita de linguagens maiores e maiores:

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$$

- Onde $L_0 = L$ e $L_{n+1} = L_n'$. Ou seja, cada linguagem L_{n+1} é o resultado da aplicação da construção acima à linguagem L_n.
- A linguagem de Henkin L_H para L consiste de todos os símbolos de cada L_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Repare, que com a construção de Henkin iterada, é possível obter constantes para *wff*s com mais de uma variável livre.

Data de Nascimento de c_P

- Cada constante c_P é introduzida em algum estágio $n \geq 1$ (L_n) da construção acima. Chamemos este estágio de *data de nascimento* de c_P.

Lema 1 – (**Lema da Data de Nascimento**) – (crucial para o Teorema da Eliminação)

Seja $n + 1$ a data de nascimento de c_P. Se Q é uma *wff* qualquer da linguagem L_n, então c_P não ocorre em Q.

Prova – Se a data de nascimento de c_P é $n + 1$, então c_P faz parte da linguagem L_{n+1} mas não faz parte da linguagem L_n. Então é claro que c_P não pode ocorrer em nenhuma *wff* Q de L_n. ♦

(2) A Teoria de Henkin - Introdução

- Repare que na linguagem L_H, que é o resultado geral da seqüência infinita de iterações que adicionam constantes testemunhas, se $\mathsf{P}(x)$ é uma *wff* com exatamente uma variável livre x, então a constante testemunha $c_{\mathsf{P}(x)}$ também está em L_H.
- Então, a seguinte sentença é uma *wff* de L_H: $\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}(x)})$
- Esta sentença é conhecida como Axioma da Testemunha de Henkin para $\mathsf{P}(x)$.
- A idéia intuitiva é que se há algo que satisfaz $\mathsf{P}(x)$, então o objeto nomeado por $c_{\mathsf{P}(x)}$ provê um exemplo (uma testemunha) para este algo.

Lema 2 – **(Lema da Independência)**

Se c_{P} e c_{Q} são duas testemunhas e a data de nascimento de c_{P} é menor ou igual à data de nascimento de c_{Q}, então c_{Q} não ocorre no Axioma da Testemunha de Henkin de c_{P}.

Prova:

- Seja n o estágio da construção de L_H em que a constante c_{P} foi introduzida (sua data de nascimento). Então, podemos observar que:
  1. c_{P} é uma constante da linguagem L_n e não faz parte de L_{n-1}.
  2. $\mathsf{P}(x)$ é uma *wff* de L_{n-1}.
  3. O axioma da testemunha de Henkin de c_{P} $(\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}(x)}))$ é uma sentença de L_n, mas não de L_{n-1}.
- (1) é trivial, pela definição de data de nascimento.
- (2) também é trivial, pois as testemunhas de Henkin com data de nascimento n são obtidas de uma lista de todas as *wff* de L_{n-1}. Assim, se $c_{\mathsf{P}(x)}$, com data de nascimento n, é a testemunha de $\mathsf{P}(x)$, então em $\mathsf{P}(x)$ é *wff* de L_{n-1}.
- (3) é conseqüência de (1) e (2), pois se $\mathsf{P}(x)$ é *wff* de L_{n-1} e $c_{\mathsf{P}(x)}$ é constante de L_n, e não de L_{n-1} então $(\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}(x)}))$ é sentença de L_n, mas não de L_{n-1}.
- Assim, se n, a data de nascimento de c_{P} é estritamente menor que m, a data de nascimento de c_{Q}, $(n < m)$, então c_{Q} é constante de L_m. e não faz parte de L_{n-1}. Logo, (3) e o Lema da Data de Nascimento garantem que c_{Q} não ocorre no axioma da testemunha de Henkin de c_{P}.
- Se c_{P} e c_{Q} têm a mesma data de nascimento n, ambas são constantes de L_n. Então (2) e o Lema da Data de Nascimento garantem que c_{Q} não ocorre em $\mathsf{P}(x)$ e portanto, também não ocorre em $(\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}(x)}))$. ♦

A Teoria de Henkin - Definição

- A Teoria de Henkin $\mathcal{H}$ consiste no conjunto de todas as sentenças da linguagem L_H de qualquer uma das cinco formas abaixo, onde c e d são constantes quaisquer e $\mathsf{P}(x)$ é uma *wff* qualquer com exatamente uma variável livre:
  - **H1**: Todos os Axiomas das Testemunhas de Henkin:
    - $\exists x\mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(c_{\mathsf{P}(x)})$
  - **H2**: Todas as sentenças da forma:

- $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$

- **H3**: Todas as sentenças da forma:
  - $\neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- **H4**: Todas as sentenças da forma:
  - $c = c$
- **H5**: Todas as sentenças da forma:
  - $(P(c) \wedge c = d) \rightarrow P(d)$

Conexão com as Regras dos Quantificadores e Identidade

- Repare que as 5 formas das sentenças de $\mathcal{H}$ se relacionam com as regras para os quantificadores e para a identidade no sistema F.
  - H1 corresponde a ∃Elim, pois ambas são justificadas pela mesma intuição.
  - H2 corresponde a ∃Intro.
  - H3 reduz ∀ a ∃ (uma equivalência lógica demonstrável em *F*).
  - H4 corresponde a =Intro.
  - H5 corresponde a =Elim.

Repare que os axiomas H2 – H5 são todos *verdades lógicas*, enquanto que H1 não é, pois representa uma afirmação substantiva sobre a interpretação das testemunhas de Henkin. A Proposição abaixo, embora não seja necessária para a prova da completude, ajuda a explicar porque o restante da prova tem alguma chance de funcionar.

Proposição 3 – Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura de primeira ordem qualquer para a linguagem *L*. Há uma forma de interpretar todas as testemunhas de Henkin no universo de $\mathfrak{M}$, de tal forma que sob esta interpretação, todas as sentenças de $\mathcal{H}$ são verdadeiras.

Prova: – (Apenas um Esboço)

- A idéia básica da prova é que se $\mathfrak{M} \models \exists x P(x)$, então pegue qualquer elemento $b \in D^{\mathfrak{M}}$ que satisfaça $P(x)$ e faça a testemunha $c_{P(x)}$ nomear *b*. Se $\mathfrak{M} \models \neg\exists x P(x)$ então faça $c_{P(x)}$ nomear um elemento fixo do domínio. Isso torna todos os axiomas da forma H1 verdadeiros em $\mathfrak{M}$. Para os demais axiomas (H2 – H5), como eles são verdades lógicas, é certo que serão verdadeiros em qualquer estrutura $\mathfrak{M}$. ♦

A Proposição 3 mostra que nossa estratégia tem alguma chance de funcionar, porque nos permite perceber que os únicos fatos substantivos afirmados em $\mathcal{H}$ que não são logicamente válidos (as instâncias de H1) não podem ser exprimidos na linguagem original *L*, pois exigem as testemunhas de L_H. Segue-se então da Proposição 3 que:

Proposição 3*a* (Eliminação Semântica) – Se $\Gamma \cup \mathcal{H} \models S$ e tanto S quanto todas as sentenças de Γ são sentenças da linguagem L,[1] então $\Gamma \models S$.

Prova:

- Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura de primeira ordem tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$. A Proposição 3 garante que existe $\mathfrak{M}'$ tal que $\mathfrak{M}' \models \Gamma \cup \mathcal{H}$, onde $\mathfrak{M}'$ difere de $\mathfrak{M}$ apenas na *função nomeação*, pois em $\mathfrak{M}'$ todas as constantes testemunhas de Henkin são interpretadas.
- Como $\mathfrak{M}' \models \Gamma \cup \mathcal{H}$ e $\Gamma \cup \mathcal{H} \models S$, então é claro que $\mathfrak{M}' \models S$. Mas como S é sentença de L, nenhuma testemunha de Henkin ocorre em S, logo $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ são indistinguíveis com relação a S. Então, de acordo com a Proposição 1 (do Teorema da Correção de 1ª ordem), $\mathfrak{M} \models S$.
- Assim, como para uma estrutura $\mathfrak{M}$ qualquer, tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$, mostramos que $\mathfrak{M} \models S$, então, por generalização universal e pela definição de conseqüência de primeira ordem, $\Gamma \models S$. ♦

(3) O Teorema da Eliminação

Nossa tarefa agora é provar que o sistema dedutivo ***F*** é forte o suficiente para garantir a versão sintática da Proposição 3*a*.

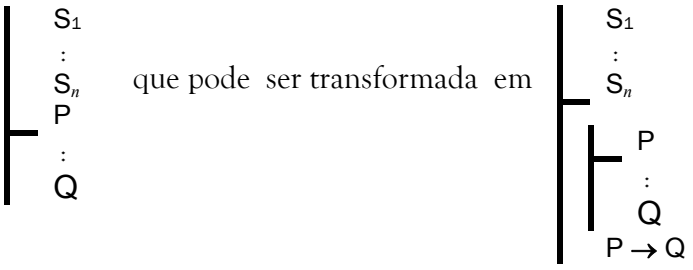
Proposição 4 (Teorema da Eliminação) – Seja p uma prova formal qualquer, em primeira ordem, cuja conclusão é S, uma sentença da linguagem L, e cujas premissas são as sentenças $P_1, ..., P_n$, também da linguagem L, juntamente com algumas sentenças de $\mathcal{H}$. Então existe uma prova formal p' de S cujas premissas são apenas $P_1, ..., P_n$.

- Dividiremos os argumentos da prova deste teorema em vários lemas. Ao final desta seção, após o Lema 10, juntaremos as coisas.

Proposição 5 (Teorema da Dedução) – Se $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ então $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$.

Prova:

- Seja p uma prova de $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ e seja $S_1, ..., S_n$ as sentenças pertencentes a Γ que são premissas da prova p. Então p tem a seguinte estrutura:



que pode ser transformada em

que é uma prova de $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$. ♦

Lema 6 (Corolário do Teorema Dedução) – Se $\Gamma \cup \{P_1, ..., P_n\} \vdash Q$ e, para cada $i = 1, ..., n$, $\Gamma \vdash P_i$, então $\Gamma \vdash Q$.

Prova:

[1] Ou seja, não possuem as constantes Testemunhas de Henkin.

- Se $\Gamma \cup \{P_1, ..., P_n\} \vdash Q$, então pelo Teorema da Dedução (Proposição 5 acima), $\Gamma \cup \{P_1, ..., P_{n-1}\} \vdash P_n \to Q$. Como, por hipótese do lema, $\Gamma \vdash P_n$, então, podemos juntar estas duas provas, acrescentando a regra ($\to$Elim) e obtemos: $\Gamma \cup \{P_1, ..., P_{n-1}\} \vdash Q$.
- Se repetirmos n vezes este processo, então obtemos: $\Gamma \vdash Q$. ♦

Lema 7 (Dois Fatos Simples) – Seja Γ um conjunto de sentenças de alguma linguagem de primeira ordem *L*, e sejam P, Q e R sentenças de *L*. Então:

1. Se $\Gamma \vdash P \to Q$ e $\Gamma \vdash \neg P \to Q$ então $\Gamma \vdash Q$.
2. Se $\Gamma \vdash (P \to Q) \to R$ então $\Gamma \vdash \neg P \to R$ e $\Gamma \vdash Q \to R$.

Prova:

(Item 1)

- Sabemos que há uma prova p_1 sem premissas de $P \vee \neg P$ no sistema F. Sejam p_2 e p_3 provas respectivamente de $\Gamma \vdash P \to Q$ e $\Gamma \vdash \neg P \to Q$. Então é fácil juntarmos p_1, p_2 e p_3 na seguinte prova de $\Gamma \vdash Q$ que é suficiente para provar o Item 1,

	Γ	
	:	(p_1)
i.	$P \vee \neg P$	
	:	(p_2)
j.	$P \to Q$	
	:	(p_3)
k.	$\neg P \to Q$	
k+1.	P	
k+2.	Q	$\to$Elim: *j*, *k*+1
k+3.	$\neg P$	
k+4.	Q	$\to$Elim: *k*, *k*+3
k+5.	Q	$\vee$Elim: *i*, *k*+1–*k*+2, *k*+3–*k*+4

(Item 2) ☹

- A prova deste item é semelhante à do item anterior. Ou seja, considerando p_1 uma prova para $\Gamma \vdash (P \to Q) \to R$ é possível apresentar uma prova p_2 para $\Gamma \vdash \neg P \to R$ e uma prova p_3 para $\Gamma \vdash Q \to R$. Deixamos como EXERCÍCIO ☹. ♦

Lema 8 (Substituindo Constantes por Quantificadores) – Seja Γ um conjunto de sentenças de primeira ordem de uma linguagem de primeira ordem *L* e seja Q uma sentença de *L*. Seja $P(x)$ uma *wff* de *L* com uma variável livre e que não tenha ocorrência da constante c. Se $\Gamma \vdash P(c) \to Q$ e c não ocorre em Γ nem em Q, então $\Gamma \vdash \exists x P(x) \to Q$.

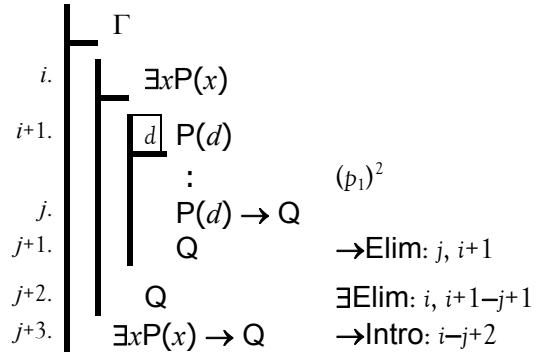
Prova:

- Assuma, como hipótese de uma prova condicional, que $\Gamma \vdash P(c) \to Q$ e que c não ocorre em Γ em Q nem em $P(x)$. Seja p uma prova para $\Gamma \vdash P(c) \to Q$. Sobre p podemos afirmar que:

  (1) Uma inspeção nas regras do sistema F é suficiente para nos fazer notar que como c não ocorre em nenhuma premissa de p, as únicas regras que permitiriam a sua introdução fora de qualquer subprova são as regras ($\forall$Elim) e ($\bot$Elim), que não fazem nenhuma restrição com relação à constante introduzida.

(2) É fácil ver que $\Gamma \vdash P(d) \to Q$ para qualquer outra constante d que não ocorra em Γ, $P(x)$ e Q. Basta tomar a prova original p e substituir todas as ocorrências de c por d. Caso d ocorra em algum outro lugar da prova, substitua estas ocorrências por outra constante qualquer. Pode até ser c. Seja p_1 uma prova de $\Gamma \vdash P(d) \to Q$ assim construída.

- Podemos então, a partir de p_1, construir a seguinte prova de $\Gamma \vdash \exists x P(x) \to Q$:



- Partimos de uma prova p de $\Gamma \vdash P(c) \to Q$ que satisfaz as condições do lema e mostramos como obter uma prova p_2 de $\Gamma \vdash \exists x P(x) \to Q$. Portanto, pelo princípio da prova condicional, provamos o lema. ♦

Lema 9 (Eliminando o Axioma das Testemunhas) – Seja Γ um conjunto de sentenças de primeira ordem de uma linguagem de primeira ordem L. Seja $P(x)$ uma *wff* de L com uma variável livre que não tem ocorrência da constante c. Se $\Gamma \cup \{\exists x P(x) \to P(c)\} \vdash Q$ e c não ocorre em Γ nem em Q, então $\Gamma \vdash Q$.

Prova:

- Assuma que $\Gamma \cup \{\exists x P(x) \to P(c)\} \vdash Q$, onde a constante c não ocorre em Γ, Q nem em $P(x)$. Então, pelo Teorema da Dedução (Proposição 5):

  (1) $\Gamma \vdash (\exists x P(x) \to P(c)) \to Q$.

- Logo, por (1) e pelo Item 2 do Lema 7:

  (2) $\Gamma \vdash \neg\exists x P(x) \to Q$ e

  (3) $\Gamma \vdash P(c) \to Q$

- Por (3) e pelo Lema 8:

  (4) $\Gamma \vdash \exists x P(x) \to Q$

- Portanto, por (2), (4) e pelo Item 1 do Lema 7: $\Gamma \vdash Q$. ♦

O Lema 9 nos permitirá eliminar os axiomas das testemunhas de Henkin de nossas provas formais. Mas e quanto às outras sentenças de $\mathcal{H}$? Em conjunção com o Lema 6 o próximo resultado nos permitirá eliminar estas sentenças também.

[2] Note que, pelas afirmações (1) e (2) não há problema em transferir p_1 para dentro de uma subprova nem em utilizar em p_1 a constante d introduzida nesta subprova.

Lema 10 (Eliminando os Outros Membros de $\mathcal{H}$) – Seja Γ um conjunto de sentenças de primeira ordem, seja $\mathsf{P}(x)$ uma *wff* com uma variável livre e sejam c e d nomes (símbolos de constantes). Então as seguintes sentenças são demonstráveis em F:

(a) $\mathsf{P}(c) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$

(b) $\neg \forall x \mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x)$

(c) $(\mathsf{P}(c) \wedge c = d) \rightarrow \mathsf{P}(d)$

(d) $c = c$

Prova:

- Basta provar que para cada um dos itens (*a*) até (*d*) há uma prova sem premissas no sistema F. Deixamos, claro, a prova destes 4 itens como EXERCÍCIO. ☹ ♦

Temos agora todas as peças necessárias para fazermos a prova do Teorema da Eliminação (Proposição 4). Vamos reapresentar o enunciado e fazer a prova.

Proposição 4 (Teorema da Eliminação) – Seja p uma prova formal qualquer, em primeira ordem, cuja conclusão é S, uma sentença da linguagem L, e cujas premissas são as sentenças P_1, ..., P_n, também da linguagem L, juntamente com algumas sentenças de $\mathcal{H}$. Então existe uma prova formal p' de S cujas premissas são apenas P_1, ..., P_n.

Prova: (por indução no número k de sentenças de $\mathcal{H}$ que são premissas na prova p)

- Mostraremos como eliminar de nossa prova de S todas as k premissas que são sentenças da Teoria de Henkin $\mathcal{H}$. Ou seja, mostraremos como transformar a prova p em uma prova p' cujas premissas são apenas P_1, ..., P_n.
- **Base**: $k = 0$
- Neste caso, o número de premissas da prova p que são sentenças da teoria $\mathcal{H}$ é 0. Portanto, não há nada o que eliminar.
- **Passo**: $k > 0$ (há premissas em p que são sentenças de $\mathcal{H}$)
- **HI**: o teorema é válido para qualquer prova cujo número de premissas que são sentenças de $\mathcal{H}$ é menor do que k.
- Temos, portanto, que provar que o teorema é válido para a prova p, que tem k premissas.
- Considere:
    - $\Gamma_1 = \{\mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_n\}$ o conjunto de todas as premissas da prova p que **não são** sentenças de $\mathcal{H}$;
    - $\Gamma_2 = \{\mathsf{H1}_1, ..., \mathsf{H1}_r\}$ o conjunto de todas as premissas da prova p que são **instâncias de H1** (o axioma das testemunhas de Henkin);
    - $\Gamma_3 = \{\mathsf{H}_1, ..., \mathsf{H}_s\}$ o conjunto de todas as premissas da prova p que são **instâncias dos outros axiomas de $\mathcal{H}$** (H2, H3, H4, H5).
- Consideraremos 2 casos ($|\Gamma_3| > 0$ e $|\Gamma_3| = 0$):

- **CASO 1**: ($|\Gamma_3| > 0$) Ou seja, pelo menos uma das premissas de p é uma instância de um dos axiomas H2, H3, H4 ou H5.
- Como $\Gamma_3 = \{H_1, ..., H_s\}$, o Lema 10 garante que para cada $i = 1, ..., s$, $\vdash H_i$. Portanto, para cada $i = 1, ..., s$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash H_i$. Como p é prova de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{H_1, ..., H_s\} \vdash S$, então, pelo Lema 6: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash S$. Chamemos de p_1 uma prova deste argumento.
- Como, por hipótese deste caso $|\Gamma_3| > 0$, então o número de premissas de p_1 que são sentenças de $\mathcal{H}$ é menor do que k. Logo, vale para p_1 a hipótese indutiva e, portanto, podemos retirar de p_1 todas as premissas de $\mathcal{H}$, transformando p_1 em uma prova p_2 que é prova de $\Gamma_1 \vdash S$. Então p_2 é, como queríamos, prova de $\{P_1, ..., P_n\} \vdash S$.
- **CASO 2**: ($|\Gamma_3| = 0$) Todas as premissas de p que são sentenças da teoria $\mathcal{H}$ são instâncias de H1, o axioma das testemunhas de Henkin.
- Seja $\exists x R(x) \rightarrow R(c)$ a premissa de p em Γ_2 (que é um axioma para a testemunha c) cuja constante testemunha c tem a maior data de nascimento entre todas as constantes testemunhas das outras premissas de p.
- Ou seja, a data de nascimento de c é maior ou igual que a data de nascimento de qualquer outra constante testemunha mencionada nas sentenças de Γ_2.
- Então, pelo Lema da Independência (Lema 2), c não ocorre em nenhuma outra sentença de Γ_2. Portanto, c não ocorre em nenhuma outra premissa de p nem na conclusão S. Além disso, como $\exists x R(x) \rightarrow R(c)$ é o axioma da testemunha c, então, pelo Lema da Data de Nascimento (Lema 1), c também não ocorre em $R(x)$.
- Considere o conjunto de sentenças $\Delta = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 - \{\exists x R(x) \rightarrow R(c)\}$. Então p é uma prova de $\Delta \cup \{\exists x R(x) \rightarrow R(c)\} \vdash S$ e c não ocorre em Δ em S nem em $R(x)$.
- Portanto, pelo Lema 9, $\exists x R(x) \rightarrow R(c)$ pode ser eliminada. Isso nos leva a uma prova p' cujo número de premissas que são sentenças da teoria $\mathcal{H}$ é menor do que k. Logo, vale a Hipótese de Indução para p' e, portanto, todas as outras premissas instâncias de H1 podem ser eliminadas, resultando em uma prova de $\{P_1, ..., P_n\} \vdash S$. E isto finaliza a prova do Teorema da Eliminação. ♦

(4) A Construção de Henkin

Na Proposição 3 provamos que dada uma estrutura de primeira ordem qualquer $\mathfrak{M}$ para uma linguagem L, é possível ampliar a função nomeação de $\mathfrak{M}$ de tal forma a criar uma estrutura $\mathfrak{M}_H$ que amplia $\mathfrak{M}$ de modo a também tornar verdadeiras todas as sentenças de $\mathcal{H}$. Esta estrutura ampliada pode ser usada para definir uma valoração h que torna verdadeiras todas as sentenças verdadeiras em $\mathfrak{M}_H$ e torna falsas todas as sentenças falsas em $\mathfrak{M}_H$. (Reveja o exercício 18.11). O passo principal de nossa prova para o Teorema da Completude é mostrar que este processo é reversível, ou seja:

Teorema (Lema da Construção de Henkin) – Seja h uma valoração qualquer para a linguagem L_H que atribui T para todas as sentenças da teoria de Henkin $\mathcal{H}$. Então há uma estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}_h$ tal que $\mathfrak{M}_h \models S$ para toda sentença S tal que $h(S) = T$.

- Apresentaremos uma prova para este teorema assumindo que nossa linguagem *L* não contém símbolos de função. Ao final mostraremos como modificar a prova para admitir linguagens em que os símbolos de função ocorram.
- A prova terá duas partes. Na primeira mostraremos como construir $\mathfrak{M}_h$ a partir de h e na segunda mostraremos que todas as sentenças que são verdadeiras segundo a valoração h também são verdadeiras segundo a estrutura $\mathfrak{M}_h$.
- Para construir $\mathfrak{M}_h$, por motivos meramente didáticos, apresentaremos primeiramente uma idéia que, apesar de estar no caminho certo, é incorreta. Possui uma falha. Então, evidenciaremos a falha e indicaremos sua correção.
- Construção Incorreta de $\mathfrak{M}$:
    - O Domínio de $\mathfrak{M}$ será o conjunto das constantes da linguagem L_H.
    - Como função nomeação, faça cada constante nomear a si mesma.
    - Defina a extensão de cada predicado *n*-ário R como o conjunto de *n*-úplas ordenadas $\langle c_1, ..., c_n\rangle$ tais que a sentença $\mathsf{R}(c_1, ..., c_n)$ recebe valor T de *h*. Ou seja, $\langle c_1, ..., c_n\rangle \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow h(\mathsf{R}(c_1, ..., c_n)) = \mathsf{T}$.
- O Problema desta Construção de $\mathfrak{M}$:
    - Seja c uma constante de L_H e seja $c = x$ uma *wff* com uma variável livre.
    - Então, de acordo com a definição das constantes testemunhas de Henkin, $c = x$ tem uma testemunha ($c_{c=x}$). Chamemos de d a esta testemunha $c_{c=x}$.
    - Considere a seguinte prova:

1.	$\exists x\, c = x \rightarrow c = d$	Instância de H1
2.	$c = c$	Instância de H4
3.	$c = c \rightarrow \exists x\, c = x$	Instância de H2
4.	$\exists x\, c = x$	→Elim: 3, 2
5.	$c = d$	→Elim: 1, 4

    - Esta prova mostra que $\mathcal{H} \vdash_{\mathsf{T}} c = d$. Portanto, pelo Teorema da Correção Proposicional, $\mathcal{H} \models_{\mathsf{T}} c = d$.
    - Logo, como a valoração h (do enunciado do Lema da Construção de Henkin) torna verdadeiras todas as sentenças de $\mathcal{H}$, então, pela definição de conseqüência tautológica, $h(c = d) = \mathsf{T}$.
    - *(a)* Portanto, como $h(c = d) = \mathsf{T}$, de acordo com a construção (incorreta) da estrutura $\mathfrak{M}$ que acabamos de indicar, o par $\langle c, d\rangle$ pertence à extensão da relação "=" em $\mathfrak{M}$.
    - *(b)* Mas, também pela construção de $\mathfrak{M}$, como c e d são dois símbolos de constante distintos de nossa linguagem L_H, eles representam elementos distintos de $D^{\mathfrak{M}}$, o domínio de $\mathfrak{M}$.
    - Estamos, então, diante da seguinte situação: de acordo com (*b*) há dois elementos distintos do domínio de $\mathfrak{M}$ que, de acordo com (*a*), estão na extensão do predicado "=". Isto é contraditório com a interpretação lógica do símbolo de identidade. Ser idêntico é ser o mesmo. De acordo com a nossa definição de estrutura de primeira ordem, para cada elemento α do domínio de uma estrutura de primeira ordem qualquer, a extensão do predicado "=" tem apenas os pares $\langle\alpha, \alpha\rangle$.

- Então, o erro em nossa construção de $\mathfrak{M}$ é permitir que pares ordenados de elementos distintos de seu domínio, como $\langle b, c\rangle$, estejam na extensão do predicado "=".

- Classes de Equivalência e Quociente – Solucionando o Problema de $\mathfrak{M}$:
  - Este problema é bastante comum em diversas situações matemáticas. Precisamos "identificar" em $\mathfrak{M}$ vários elementos que são distintos. A solução para estes casos é o que os matemáticos costumam chamar de "quociente" de $\mathfrak{M}$.
  - As relações de equivalência e classes de equivalência, que estudamos no Capítulo 15, são as ferramentas ideais para resolvermos este problema. Vamos à solução:
  - Definimos a relação "$\equiv$" sobre as constantes de L_H (o domínio de $\mathfrak{M}$) da seguinte forma:
    - $c \equiv d$ se e somente se $h(c = d) = \mathsf{T}$.

Lema 11 A relação $\equiv$ é uma relação de equivalência.

Prova:

- Uma relação R qualquer é de equivalência, conforme definimos no Capítulo 15, se for reflexiva, simétrica e transitiva.

(a): Suponha que provamos os seguintes argumentos, para constantes c, d e e genéricas:

- Reflexividade $\quad \mathfrak{H} \vdash_{\mathsf{T}} c = c$
- Simetria $\quad \mathfrak{H} \vdash_{\mathsf{T}} c = d \rightarrow d = c$
- Transitividade $\quad \mathfrak{H} \vdash_{\mathsf{T}} (c = d \wedge d = e) \rightarrow c = e$

- Pela Correção Proposicional, para quaisquer constantes c, d e e:
  - $\mathfrak{H} \models_{\mathsf{T}} c = c$
  - $\mathfrak{H} \models_{\mathsf{T}} c = d \rightarrow d = c$
  - $\mathfrak{H} \models_{\mathsf{T}} (c = d \wedge d = e) \rightarrow c = e$

- Mas então, pela definição de h, para quaisquer constantes c, d e e:
  - $h(c = c) \;=\; h(c = d \rightarrow d = c) \;=\; h((c = d \wedge d = e) \rightarrow c = e) \;=\; \mathsf{T}$.

- Logo, pela definição da relação $\equiv$, para quaisquer constantes c, d e e vale:
  - Reflexividade $\quad c \equiv c$
  - Simétria $\quad c \equiv d \rightarrow d \equiv c$
  - Transitividade $\quad (c \equiv d \wedge d \equiv e) \rightarrow c \equiv e$

- Portanto, $\equiv$ é uma relação de equivalência.

- Assim, para esta prova ficar COMPLETA é preciso provar a suposição (*a*) acima. Ou seja, é preciso fazer provas proposicionais das sentenças $c = c$, $c = d \rightarrow d = c$ e $(c = d \wedge d = e) \rightarrow c = e$ cujas premissas sejam apenas instâncias dos axiomas da Teoria de Henkin. Deixamos estas provas como EXERCÍCIO! ♦ ☹

Construção da Estrutura Correta – $\mathfrak{M}_h$

- Como $\equiv$ é relação de equivalência, então cada constante c de L_H está relacionada a sua classe de equivalência $[c]_{\equiv}$ segundo a relação $\equiv$ da seguinte forma: $[c]_{\equiv} = \{d \mid c \equiv d\}$.
- Ou seja, a classe de equivalência de c segundo a relação $\equiv$ é o conjunto de todas as constantes d que estão na relação $\equiv$ com c. Por brevidade, vamos omitir o símbolo da relação $\equiv$ do subíndice de suas classes de equivalência. Assim, nos referiremos à classe de equivalência da constante c segundo a relação $\equiv$ apenas por $[c]$.
- Podemos agora definir a desejada estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}_h$ da seguinte maneira:
    - O Domínio de $\mathfrak{M}_h$ será o conjunto de todas as classes de equivalência das constantes da linguagem L_H segundo a relação $\equiv$.[3] $D^{\mathfrak{M}_h} = \{[c]_{\equiv} \mid c$ é constante de $L_H\}$.
    - Como função nomeação, cada constante c nomeará sua classe de equivalência $[c]$.
    - A extensão do predicado n-ário R será o conjunto de n-úplas ordenadas $\langle[c_1], ..., [c_n]\rangle$ tais que a sentença $\mathsf{R}(c_1, ..., c_n)$ recebe valor T de h. Ou seja, $\mathsf{R}^{\mathfrak{M}_h} = \{\langle[c_1], ..., [c_n]\rangle \mid h(\mathsf{R}(c_1, ..., c_n)) = \mathsf{T}\}$.
- Repare que o problema da identidade não ocorre mais, pois constantes distintas de L_H (c e d), mas que $\mathcal{H} \models_{\mathsf{T}} c = d$ são tais que $[c] = [d]$. Logo, c e d são nomes do mesmo elemento do domínio de $\mathfrak{M}_h$ ($[c]=[d]$). Portanto, não há problema algum em termos $\mathfrak{M}_h \models c = d$.
- Precisamos agora provar que $\mathfrak{M}_h$ torna verdadeiras **todas e apenas** as sentenças que a valoração h atribui valor T. Antes de enunciar e provar este lema, o seguinte resultado auxiliar será útil.

Lema 12 Se $c \equiv c'$, $d \equiv d'$, e $h(\mathsf{R}(c, d)) = \mathsf{T}$, então $h(\mathsf{R}(c',d')) = \mathsf{T}$.

Prova: (Deixamos esta prova como EXERCÍCIO! ☹

- Como sugestão, lembre-se da questão 3 de nossa primeira prova, onde provamos que: $\mathcal{H} \vdash_{\mathsf{T}} (\mathsf{R}(c, d) \wedge c = c' \wedge d = d') \rightarrow \mathsf{R}(c',d')$. Através da definição de $\equiv$, lemas anteriores e dos conceitos que estamos trabalhando neste capítulo, é possível mostrar que o Lema 12 se segue deste fato. Tente!!

Complexidade de uma Sentença $gr(\mathsf{S})$

- Antes de enunciarmos e provarmos o lema crucial da construção de Henkin, aquele que garantirá que para cada sentença S de L_H $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$ se e somente se $h(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$, definiremos uma maneira alternativa de medirmos complexidade de uma sentença S. Esta definição representará um índice de indução adequado para a prova do lema crucial.
- O problema de tomarmos o comprimento (número de conectivos) das sentenças como índice de indução para nossa prova está no fato de que nela usaremos propriedades da teoria $\mathcal{H}$. A teoria $\mathcal{H}$, no entanto, não trata diretamente do conectivo $\forall$, mas possui como esquema de axioma a equivalência $\neg\forall x\mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x\neg\mathsf{P}(x)$.

[3] O domínio de $\mathfrak{M}_h$ assim definido é conhecido como o *conjunto quociente* segundo a relação $\equiv$ do conjunto de todas as constantes de L_H.

- Mas $\neg\forall x\mathsf{P}(x)$ e $\exists x\neg\mathsf{P}(x)$ têm o mesmo comprimento (número de conectivos). Assim, ao reduzirmos $\neg\forall x\mathsf{P}(x)$ à $\exists x\neg\mathsf{P}(x)$ não podemos aplicar a hipótese de indução a este segunda sentença.
- Queremos, então, uma maneira de computar a complexidade das sentenças que, no entanto, atribua um peso maior ao $\forall$ que ao $\exists$, de modo que $\exists x\neg\mathsf{P}(x)$ tenha índice de indução menor que $\neg\forall x\mathsf{P}(x)$.
- Assim, para toda sentença S definimos sua complexidade $gr(\mathsf{S})$ indutivamente como:
    1. Se S é sentença atômica, $gr(\mathsf{S}) = 0$.
    2. Se S é $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$ ou $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$ ou $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ ou $\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$, $gr(\mathsf{S}) = max\{gr(\mathsf{P}), gr(\mathsf{Q})\} + 1$. [4]
    3. Se S é $\neg\mathsf{P}$ ou $\exists x\mathsf{P}$, $gr(\mathsf{S}) = gr(\mathsf{P}) + 1$.
    4. Se S é $\forall x\mathsf{P}$, $gr(\mathsf{S}) = gr(\mathsf{P}) + 3$.
- Em primeiro lugar, vale ressaltar que $gr(\mathsf{P}(x)) = gr(\mathsf{P}) = gr(\mathsf{P}(c))$.
- Repare que, por um lado: $gr(\neg\forall x\mathsf{P}(x)) = gr(\forall x\mathsf{P}(x)) + 1 = (gr(\mathsf{P}) + 3) + 1 = gr(\mathsf{P}) + 4$.
- Por outro lado: $gr(\exists x\neg\mathsf{P}(x)) = gr(\neg\mathsf{P}(x)) + 1 = gr(\mathsf{P}) + 2$.
- Portanto, $gr(\neg\forall x\mathsf{P}(x)) > gr(\exists x\neg\mathsf{P}(x))$.
- Com este novo índice de indução, vamos agora ao Lema crucial.

Lema 13 (Lema Crucial) – Para cada sentença S de L_H, $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S}$ se e somente se $h(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$.

Prova: (Por indução em $gr(\mathsf{S})$)

- **Base**: $gr(\mathsf{S}) = 0$. Ou seja, S é sentença atômica do tipo $\mathsf{R}(c_1,..., c_n)$
- Imediata pelas definições de estrutura de primeira ordem e pela definição de $\mathfrak{M}_h$ acima, pois:
- $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{R}(c_1,..., c_n) \Leftrightarrow \langle [c_1],..., [c_n]\rangle \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}_h} \Leftrightarrow h(\mathsf{R}(c_1,..., c_n)) = \mathsf{T}$.
- **Passo**: $gr(\mathsf{S}) > 0$. Ou seja, S é sentença complexa com uma das seguintes formas:
  $\neg\mathsf{P}$, $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$, $\exists x\mathsf{P}(x)$, $\forall x\mathsf{P}(x)$.
- **HI**: Para qualquer sentença com complexidade menor que $gr(\mathsf{S})$, vale o Lema 13. Em especial, vale para P e Q. Portanto:
    - $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P} \Leftrightarrow h(\mathsf{P}) = \mathsf{T}$ e $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{Q} \Leftrightarrow h(\mathsf{Q}) = \mathsf{T}$.
- Os casos proposicionais, em que S tem uma das formas: $\neg\mathsf{P}$, $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}$, são triviais, pois a definição de satisfação em estruturas de primeira ordem para cada conectivo proposicional coincide com a definição de valoração para este conectivo. Vejamos um caso como exemplo:
- **CASO 1**: S tem a forma $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$.
- $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}_h \not\models \mathsf{P}$ ou $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{Q}$ (pela def. de satisfação)
  $\Leftrightarrow$ $h(\mathsf{P}) = \mathsf{F}$ ou $h(\mathsf{Q}) = \mathsf{T}$ (por HI)
  $\Leftrightarrow$ $h(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}) = \mathsf{T}$ (pela def. de valoração)
- Os demais casos proposicionais são exatamente análogos, e deixamos como EXERCÍCIOS! ☹

[4] Ou seja, neste caso a complexidade de S é o valor máximo entre as complexidades de P e Q, somado de 1.

- Para resolver os casos que envolvem os quantificadores, vamos precisar também utilizar propriedades da teoria $\mathcal{H}$. Vejamos:
- **CASO 2**: S tem a forma $\exists x\, \mathsf{P}(x)$.
- Queremos provar que $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x) \Leftrightarrow h(\exists x\, \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$. Dividiremos a prova nos casos da ida ($\Rightarrow$) e da volta ($\Leftarrow$)
- Sub-Caso 2.1: ($\Rightarrow$) – Por hipótese, assuma que $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x)$.
- $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x) \Rightarrow$ Para algum $[d] \in D^{\mathfrak{M}_h}$, $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(x)[g_{\varnothing}[x/[d]]]$ (pela def. de satisfação)
  $\Rightarrow$ para alguma constante d de L_H, $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(d)$ (pela def. de $\mathfrak{M}_h$)
  $\Rightarrow$ para alguma constante d de L_H, $h(\mathsf{P}(d)) = \mathsf{T}$ (por HI)
- Note que $\mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$ é instância do axioma H2 da teoria $\mathcal{H}$. Logo, pela definição da valoração h, $h(\mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$.
- Então, como para alguma constante d de L_H, $h(\mathsf{P}(d)) = \mathsf{T}$ e $h(\mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$, é fácil ver, por propriedades das valorações, que $h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$. Portanto:
- $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x) \Rightarrow h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$, o que resolve o subcaso.
- Sub-Caso 2.2: ($\Leftarrow$) – Por hipótese, assuma que $h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$.
- Seja d a testemunha de Henkin para $\exists x \mathsf{P}(x)$. Então, $\exists x \mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(d)$ é instância do axioma H1 da teoria $\mathcal{H}$.
- Logo, pela definição da valoração h, $h(\exists x \mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(d)) = \mathsf{T}$.
- Então, como $h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$ e $h(\exists x \mathsf{P}(x) \rightarrow \mathsf{P}(d)) = \mathsf{T}$, é claro que $h(\mathsf{P}(d)) = \mathsf{T}$.
- Mas, por HI, $h(\mathsf{P}(d)) = \mathsf{T} \Rightarrow \mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(d)$.
- Sabemos também que $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$ pois como $\mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$ é verdade lógica, para toda estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$.
- Então, como $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(d)$ e $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{P}(d) \rightarrow \exists x \mathsf{P}(x)$, então é fácil ver, por propriedades das estruturas de primeira ordem, que $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x)$.
- Logo, partindo de $h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T}$ chegamos em $\mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x)$. Portanto:
- $h(\exists x \mathsf{P}(x)) = \mathsf{T} \Rightarrow \mathfrak{M}_h \models \exists x \mathsf{P}(x)$, o que resolve o subcaso e o caso.
- **CASO 3**: S tem a forma $\forall x\, \mathsf{P}(x)$.
- Sub-Caso 3.1: ($\Rightarrow$) – Hipótese: $\mathfrak{M}_h \models \forall x \mathsf{P}(x)$.
- Da hipótese, pela definição de satisfação: $\mathfrak{M}_h \not\models \neg \forall x \mathsf{P}(x)$
- Sabemos que há uma prova sem premissas de $\neg \forall x \mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x)$ no sistema $\boldsymbol{F}$. Logo, pelo Teorema da Correção, $\neg \forall x \mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x)$ é logicamente válida, logo: $\mathfrak{M}_h \models \neg \forall x \mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x)$.
- Então, como $\mathfrak{M}_h \models \neg \forall x \mathsf{P}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{P}(x)$ e $\mathfrak{M}_h \not\models \neg \forall x \mathsf{P}(x)$, é fácil ver, pela definição de satisfação, que $\mathfrak{M}_h \not\models \exists x \neg \mathsf{P}(x)$.
- Mas note que $gr(\forall x \mathsf{P}(x)) = gr(\mathsf{P}(x)) + 3 > gr(\mathsf{P}(x)) + 2 = gr(\exists x \neg \mathsf{P}(x))$.
- Portanto, vale a hipótese de indução HI para $\exists x \neg \mathsf{P}(x)$. Logo,

- $h(\exists x \neg P(x)) = F$.
- Mas sabemos que $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ é instância de H3. Logo, $h(\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)) = T$.
- Portanto, como $h(\exists x \neg P(x)) = F$ e $h(\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)) = T$ é claro, por propriedades das valorações que $h(\neg \forall x P(x)) = F$. Logo, $h(\forall x P(x)) = T$.
- Assim, partimos de $\mathfrak{M}_h \models \forall x P(x)$ e chegamos em $h(\forall x P(x)) = T$, o que termina o subcaso.
- Sub-Caso 3.2: ($\Leftarrow$) – Hipótese: $h(\forall x P(x)) = T$.
- A prova deste subcaso é bastante parecida à do subcaso anterior e, portanto, a deixamos como EXERCÍCIO! ☹ ♦

Expandindo A Construção de Henkin para Linguagnes com Símbolos de Função

- Se houver símbolos de função na linguagem original, temos que saber como interpretá-los na nossa estrutura $\mathfrak{M}_h$.
- Suponha, por exemplo, que a linguagem L tem um símbolo de função unário f.
- Como interpretar f? Se d é uma constante, então, qual classe de equivalência deve corresponder ao valor de $f([d])$?
- A idéia é considerar a constante testemunha de Henkin para a sentença $\exists x(f(d) = x)$ ($c_{f(d) = x}$) e definir sua classe de equivalência como o valor de $f([d])$:
    - $f([d]) = [c_{f(d) = x}]$.
- Assim, uma vez que a sentença $\exists x (f(d) = x) \rightarrow f(d) = c_{f(d) = x}$ é instância de H1, não é difícil verificar que todos os detalhes da prova acima funcionariam para incluir símbolos de funções.
- E isto completa a prova dos 4 passos do Teorema da Completude. Vamos agora ao detalhamento da prova final, que junta todos estes passos.

Teorema da Completude Seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira ordem L e seja S uma sentença da mesma linguagem L. Se S é conseqüência de primeira ordem de Γ ($\Gamma \models S$) então $\Gamma \vdash S$.

Prova:

- Queremos provar que para qualquer conjunto de sentenças Γ e sentença S de uma linguagem de primeira ordem L vale: $\Gamma \models S \Rightarrow \Gamma \vdash S$.
- Assim, objetivando utilizar os métodos de generalização universal e da prova condicional, considere como hipótese Γ e S tais que: $\Gamma \models S$.
- Então, pela definição de conseqüência de primeira ordem, para toda estrutura de 1ª ordem $\mathfrak{M}$, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$ então $\mathfrak{M} \models S$.
- Logo, não existe estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg S\}$.

(*a*) Portanto, também não existe estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg S\} \cup \mathcal{H}$.

- Mas o Passo 4 (Lema 13 – da Construção de Henkin) garante que para qualquer valoração h tal que $h(\wedge \mathcal{H}) = T$, existe $\mathfrak{M}_h$ tal que $\mathfrak{M}_h \models S$ se e somente se $h(S) = T$.

- Suponha então, por absurdo, que exita uma valoração h tal que $h(\wedge\Gamma \cup \{\neg S\} \cup \mathcal{H}) = T$. Então, pelo Passo 4 (Lema 13), existiria uma estrutura $\mathcal{M}_h$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\neg S\} \cup \mathcal{H}$. O que é contraditório com a afirmação (***a***) acima. Logo, descartamos a hipótese do absurdo e concluímos que: não existe nenhuma valoração h que torne verdadeiras todas as sentenças em $\Gamma \cup \{\neg S\} \cup \mathcal{H}$. Ou seja:
    - Não existe h tal que $h(\wedge\Gamma\cup\{\neg S\}\cup\mathcal{H}) = T$.
- Logo, para toda valoração h, se $h(\wedge\Gamma\cup\mathcal{H}) = T$ então $h(\neg S) = F$.
- Ou seja, para toda valoração h, se $h(\wedge\Gamma\cup\mathcal{H}) = T$ então $h(S) = T$.
- Então, pela definição de <u>conseqüência tautológica</u>, $\Gamma\cup\mathcal{H} \models_T S$.
- Logo, pelo Teorema da Completude Proposicional, $\Gamma\cup\mathcal{H} \vdash_T S$.
- Seja p uma prova para a dedução $\Gamma\cup\mathcal{H} \vdash_T S$. O Passo 3 (Teorema da Eliminação – Proposição 4) assegura que podemos transformar p em uma prova p' de $\Gamma \vdash S$.
- Então, tomando Γ e S genéricos e partindo da hipótese de que $\Gamma \models S$ chegamos em $\Gamma \vdash S$. Portanto, aplicando os métodos da prova condicional e da generalização universal, provamos que para qualquer conjunto de sentenças Γ e sentença S de uma linguagem de primeira ordem L vale: $\Gamma \models S \Rightarrow \Gamma \vdash S$. E isto finaliza a prova da completude. ♦

<u>Teorema da Completude – Versão Generalizada</u> Todo conjunto de sentenças formalmente consistente é satisfatível.

<u>Prova</u>:

- Assuma como hipótese condicional que Γ é um conjunto arbitrário de sentenças insatisfatível.
- Então, por vacuidade, é claro que, para qualquer sentença S, $\Gamma \models S$.[5] Em particular, $\Gamma \models \bot$.
- Logo, pela versão acima demonstrada do Teorema da Completude, $\Gamma \vdash \bot$.
- Portanto, Γ não é formalmente consistente.
- Ou seja, provamos que se Γ é insatisfatível, então Γ não é formalmente consistente.
- Logo, pela contrapositiva, se Γ é formalmente consistente então é satisfatível.
- Como partimos de um conjunto Γ arbitrário, então, por generalização universal, todo conjunto de sentenças formalmente consistente é satisfatível. ♦

[5] Pois como não há estrutura $\mathcal{M}$ que satisfaça Γ, então não há nenhuma estrutura na qual todas as sentenças de Γ sejam verdadeiras e alguma sentença S seja falsa. Logo $\Gamma \models S$ para qualquer sentença S.

Löwenheim-Skolem, Compacidade e Incompletude

Baseado no Capítulo 19 do LPL

Apresentaremos agora algumas importantes conseqüências do Teorema da Completude para a Lógica de Primeira ordem, que são o Teorema de Löwenheim-Skolem e o Teorema da Compacidade. Em seguida, apresentaremos uma discussão introdutória sobre o Teorema da Incompletude da Aritmética de Gödel.

(1) O Teorema de Löwenheim-Skolem

- Um dos fatos mais surpreendentes que a prova do Teorema da Completude nos revela está na natureza da estrutura $\mathfrak{M}_h$ resultante do método da construção de Henkin. Não importa quais sejam os objetos a que nossa linguagem original se refira, objetos físicos, números, conjuntos, idéias, ... Em qualquer destes casos, os elementos do domínio da estrutura $\mathfrak{M}_h$ são do mesmo tipo: *classes de equivalência de símbolos de constante*. Esta observação nos levará à obtenção de um corolário do teorema da completude conhecido como *Teorema de Löwenheim-Skolem* para as linguagens de primeira ordem.
- Lembremos, do Capítulo 15, que há conjuntos infinitos de diferentes tamanhos. Os menores conjuntos infinitos são aqueles que têm o mesmo tamanho do conjunto dos números naturais. Chamamos de *enumerável* um conjunto se ele for finito ou tiver o mesmo tamanho do conjunto dos números naturais.

Teorema de Löwenheim-Skolem Seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem enumerável L.[1] Se Γ é satisfatível, então Γ é satisfeito por uma estrutura de primeira ordem cujo domínio é enumerável.

Prova:

- Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura de primeira ordem que satisfaz Γ ($\mathfrak{M} \models \Gamma$).
- A **Proposição 3** garante que podemos expandir $\mathfrak{M}$ a uma estrutura $\mathfrak{M}'$ de tal forma que $\mathfrak{M}'$ é uma estrutura para a linguagem expandida L_H que satisfaz a Teoria de Henkin $\mathcal{H}$ ($\mathfrak{M}' \models \mathcal{H}$).
- Podemos utilizar $\mathfrak{M}'$ para definir uma valoração h tal que para toda sentença S de L_H, $h(\mathsf{S}) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \mathsf{S}$. Repare que h assim definida torna verdadeiras todas as sentenças de $\mathcal{H}$ e de Γ. ($h(\wedge\mathcal{H} \cup \Gamma) = \mathsf{T}$).
- Então, o **Lema da Construção de Henkin** garante que podemos, a partir de h, construir uma outra estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}_h$ tal que $\mathfrak{M}_h \models \mathsf{S} \Leftrightarrow h(\mathsf{S}) = \mathsf{T}$, cujo domínio de $\mathfrak{M}_h$ é o conjunto quociente dos símbolos de constantes de L_H segundo a relação $\equiv$.
- No **Lema 14** abaixo, mostraremos que L_H tem uma quantidade enumerável de constantes. Como a quantidade de classes de equivalência das constantes de L_H segundo qualquer relação é menor ou igual a quantidade de constantes de L_H, então $D^{\mathfrak{M}_h}$, o domínio de $\mathfrak{M}_h$, também é enumerável. O que basta para provar o teorema. ♦

[1] Uma linguagem é enumerável se tem uma quantidade enumerável de símbolos.

Para finalizar a prova do Teorema de Löwenheim-Skolem precisamos então provar o seguinte lema:

Lema 14 (Enumerabilidade de L_H) – A linguagem L_H da teoria de Henkin é enumerável. Em particular, L_H tem uma quantidade enumerável de constantes.

Prova:

- O argumento em favor da enumerabilidade dos símbolos de L_H exige dois resultados sobre conjuntos enumeráveis que, por ora, vamos considerar verdadeiros. Em outra ocasião os provaremos. São eles:

  (a) Se uma linguagem tem um conjunto enumerável de símbolos, então a quantidade de fórmulas de comprimento finito que podem ser escritas com estes símbolos também é enumerável.

  (b) A união de uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis tem como resultado um conjunto enumerável.

- Lembremos que L_H é a união de $L=L_0$, L_1, L_2, L_3, ... onde cada L_i representa a linguagem intermediária em que adicionamos as constantes testemunhas de Henkin com data de nascimento i. Em primeiro lugar, provaremos que:

(1) para cada i finito (i = 1, 2, 3, ...) a quantidade de símbolos de L_i é enumerável. Faremos esta prova por indução em i.

- BASE: ($i = 0$)
- Este caso é trivial, pois $L_0 = L$ e o número de símbolos de L é, por hipótese do Teorema de Löwenheim-Skolem, enumerável.
- PASSO: ($i > 0$)
- HI: Toda linguagem L_j tal que $j < i$ tem uma quantidade enumerável de símbolos.
- Considere L_{i-1}. Por HI, L_{i-1} tem uma quantidade enumerável de símbolos.
- Então, por (*a*), existe uma quantidade enumerável de *wffs* de L_{i-1} com uma variável livre.
- Então, como cada constante com data de nascimento i é obtida de uma sentença com uma variável livre de L_{i-1}, e como a quantidade destas sentenças é enumerável, então a quantidade de constantes com data de nascimento i também é enumerável.
- Mas o conjunto dos símbolos de $L_i = L_{i-1} \cup$ {constantes de Henkin com data de nascimento i}. Como tanto L_{i-1} quanto o conjunto das constantes com data de nascimento i são enumeráveis, então por (*b*), a quantidade de símbolos de L_i também é enumerável. E isso termina a prova de (1).
- Para finalizar a prova do lema, basta notar que o conjunto dos símbolos de L_H corresponde à união da lista enumerável de conjuntos dos símbolos de cada L_i: $L_H = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup ...$
- Então, por (*b*), L_H possui uma quantidade enumerável de símbolos. Em particular, L_H possui uma quantidade enumerável de constantes. ♦

O Paradoxo de Skolem

- O Teorema de Löwenheim-Skolem tem conseqüências bastante intrigantes. Quase paradoxais. Consideremos, por exemplo, a Teoria Axiomática de Conjuntos ZFC que vimos no Capítulo 15. Ao contemplarmos seus axiomas não temos clareza total sobre quais são as estruturas às quais pretende-se que tais axiomas sejam uma caracterização. De modo geral podemos dizer, conforme a intuição de *von Neumann*, que são o universo (ou universos) dos conjuntos cumulativos pequenos.

- Nenhum destes universos é enumerável, uma vez que (1) o axioma do infinito garante que conterão pelo menos um conjunto infinito, (2) o axioma do conjunto potência garante que o conjunto potência destes conjuntos infinitos também fará parte dos universos. E (3) podemos provar, com os próprios axiomas de ZFC, que o conjunto potência de qualquer conjunto infinito não é enumerável.
- Como pode ser então que, conforme aponta o Teorema de Löwenheim-Skolem, se ZFC é satisfeito por alguma estrutura então também é satisfeito por uma estrutura cujo domínio é enumerável? Isso é muito estranho, considerando que com os próprios axiomas de ZFC podemos provar a existência de conjuntos não-enumeráveis em seu universo!!!
    - Esta situação paradoxal exemplifica o problema conhecido como *Paradoxo de Skolem*.

Superando o Paradoxo

- A superação deste estranho estado de coisas depende do entendimento da natureza da estrutura $\mathfrak{M}_h$ construída na prova do Teorema de Löwenheim-Skolem que satisfaz ZFC e cujo domínio é enumerável.
- Como sabemos, o domínio de $\mathfrak{M}_h$ é constituído por classes de equivalência de símbolos de constante. Portanto ele não é, de modo algum, nenhuma das estruturas que tínhamos em mente (os universos de conjuntos cumulativos pequenos) quando propusemos os axiomas para ZFC.
- Em $\mathfrak{M}_h$ não há *conjuntos* ou *elementos*. O que há são classes de equivalência de símbolos de constante que se comportam, de acordo com a relação $\in$, da mesma forma que os conjuntos da estrutura pretendida (o universo dos conjuntos) se comportam com relação à pertinência pretendida. Ou seja, as sentenças envolvendo estas classes de equivalência e a relação $\in$ são verdadeiras ou falsas nas mesmas circunstâncias em que sentenças envolvendo conjuntos e a pretendida relação de pertinência seriam.
- Se olharmos para esta estrutura $\mathfrak{M}_h$, veremos que ela de fato contém elementos cujo significado é ser o conjunto potência de conjuntos infinitos. Suponha que b e c sejam membros do domínio de $\mathfrak{M}_h$ que satisfazem a *wff* "x é o conjunto potência de y e y é infinito", com $b = x$ e $c = y$.
- O "conjunto" b conterá vários "elementos", cada um deles pode ser visto como um conjunto de "elementos" de c. Mas como estamos restritos a quantidades enumeráveis na estrutura $\mathfrak{M}_h$, então a maioria dos conjuntos de "elementos" de c não corresponderão a nada em b. [2]
- A questão é que a linguagem de ZFC, como todas as linguagens de primeira ordem, é uma linguagem enumerável. Portanto, em ZFC só conseguimos descrever uma quantidade enumerável de conjuntos. Em particular, só conseguimos descrever uma quantidade enumerável de conjuntos de elementos de c.
- O que ocorre é que são exatamente os "conjuntos" de "elementos" de c exprimíveis na linguagem de ZFC que serão os "elementos" de b em $\mathfrak{M}_h$.
- Mas, imaginando a estrutura original pretendida, haverá muitos conjuntos de elementos de b que não estão em c. De fato, a maioria. No entanto, estes conjuntos não são acessíveis individualmente através da linguagem de primeira ordem de ZFC. Não conseguimos falar individualmente sobre eles (exprimi-los) em uma linguagem de primeira ordem. São exatamente

[2] As aspas em "conjuntos" e "elementos" servem para lembrar que a estrutura $\mathfrak{M}_h$ não trata de conjuntos ou elementos, mas de classes de equivalência de símbolos de constante.

estes conjuntos que estão ausentes de $\mathfrak{M}_h$, ainda que estejam presentes na estrutura pretendida original da Teoria dos Conjuntos.

- Imaginemos então uma sentença (impossível de ser expressa na linguagem de ZFC) que afirma que um destes conjuntos (inefáveis em primeira ordem) de elementos de c é um elemento de b. Esta sentença seria falsa em $\mathfrak{M}_h$ (pois em $\mathfrak{M}_h$ os elementos de b são apenas os conjuntos de elementos de c exprimíveis em primeira ordem), mas verdadeira na estrutura original pretendida (o universo dos conjuntos cumulativos pequenos).
- No entanto, não conseguimos expressar na linguagem de ZFC tal sentença que expressa a diferença fundamental entre $\mathfrak{M}_h$ e o universo dos conjuntos. Portanto, apesar de $\mathfrak{M}_h$ e o universo dos conjuntos serem fundamentalmente diferentes, esta diferença não é perceptível na linguagem de ZFC. Isso permite que $\mathfrak{M}_h$ continue sendo, de fato, uma estrutura que satisfaz ZFC.
- Estruturas como $\mathfrak{M}_h$ que satisfazem uma determinada teoria, mas que são fundamentalmente diferentes (não isomorfas) às estruturas pretendidas para esta teoria, são chamadas de *modelos não-standard* da teoria.
- Assim, uma conseqüência imediata do Teorema de Löwenheim-Skolem é que toda teoria de primeira ordem cuja estrutura pretendida tenha domínio não enumerável terá um modelo não-standard. Este modelo é exatamente $\mathfrak{M}_h$, cujo domínio é enumerável.
- Outra forma de entender o que está ocorrendo em $\mathfrak{M}_h$ é pensar sobre a definição de conjunto enumerável. Um conjunto infinito b é enumerável se há uma função injetora de b no conjunto dos números naturais. Fora de $\mathfrak{M}_h$ podemos ver que há tal função enumerando b ("conjunto" potência de um "conjunto" infinito c em $\mathfrak{M}_h$). No entanto, internamente a $\mathfrak{M}_h$ não há nada que corresponda a esta função. Ou seja, a enumerabilidade de b não é expremível em $\mathfrak{M}_h$. Portanto, internamente a $\mathfrak{M}_h$, b é considerado não-enumerável.
- A Lição do Paradoxo de Skolem: as linguagens de primeira-ordem não são ricas o suficiente para capturar os vários conceitos que implicitamente assumimos quando pensamos sobre o universo pretendido da teoria dos conjuntos. O conceito chave que não conseguimos expressar adequadamente é a noção de um subconjunto arbitrário de um conjunto, ou, o que acaba dando no mesmo, a noção do conjunto potência de um conjunto. Quando definimos o conjunto potência em uma linguagem de primeira-ordem, nenhum axioma consegue excluir estruturas tais como $\mathfrak{M}_h$ nas quais "conjunto potência" significa algo bem diferente do que a noção pretendida.

(2) O Teorema da Compacidade

- Outro corolário do Teorema da Completude é o Teorema da Compacidade:

Teorema da Compacidade Seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira-ordem *L*. Se cada subconjunto finito de Γ for satisfatível (verdadeiro em alguma estrutura), então Γ é satisfatível (há uma estrutura $\mathfrak{M}$ que torna verdadeiras todas as sentenças de Γ).

Prova: (idêntica à prova da Compacidade Proposicional!!)

- Assuma, como hipótese condicional que Γ é insatisfatível.
- Então, pela contrapositiva da versão generalizada do Teorema da Completude, Γ não é formalmente consistente. Ou seja, $\Gamma \vdash \bot$.

- Sejam $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ as premissas de Γ presentes em uma prova de $\Gamma \vdash \bot$.
- Como $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ são as premissas de uma prova, que é um objeto finito, então $\{\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\}$ é um subconjunto finito de Γ.
- Além disso, como $\{\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\} \vdash \bot$, então $\{\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\}$ não é formalmente consistente.
- Logo, pela contrapositiva do Teorema da Correção, $\{\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n\}$ é insatisfatível. Ou seja, um subconjunto finito de Γ é insatisfatível.
- Então, provamos que se Γ é insatisfatível, existe um subconjunto finito de Γ que é insatisfatível.
- Logo, pela contrapositiva, se todo subconjunto finito de Γ é satisfatível, então Γ é satisfatível. ♦

Modelos Não-Standard para a Aritmética de Primeira Ordem

- Assim como o Teorema de Löwenheim-Skolem, o Teorema da Compacidade torna explicitas algumas limitações importantes das linguagens de primeira ordem. Em particular, podemos mostrar que é impossível definir em linguagem de primeira ordem um conjunto de axiomas que caracterize univocamente a estrutura dos números naturais.

Teorema (Modelos Não-Standard da Aritmética) Seja *L* a linguagem da aritmética de Peano. Existe uma estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}$ tal que:

(1) $\mathfrak{M}$ contém todos os números naturais em seu domínio.

(2) $\mathfrak{M}$ também contém elementos maiores que todos os números naturais.

(3) $\mathfrak{M}$ torna verdadeiras exatamente as mesmas sentenças de *L* que são verdadeiras sobre os números naturais.

Prova:

- A linguagem da aritmética de Peano, conforme definimos no Capítulo 16, não possui um símbolo para a relação "maior que". Mas podemos defini-la como:
  - $x > y \;=_{\text{df}}\; \exists z\,(z \neq 0 \wedge x = y + z)$
- Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura de primeira ordem que satisfaz os axiomas da aritmética de Peano de primeira ordem PA.
- Dizer que um determinado elemento n de $\mathfrak{M}$ é maior que TODOS os números naturais equivale a dizer que n satisfaz todas as seguintes *wff*s:
  - $x > 0$
    $x > 1$
    $x > 1 + 1$
    $x > (1 + 1) + 1$
    :
- Seja Γ o conjunto de todas as sentenças da linguagem *L* (a linguagem de PA) que expressam fatos verdadeiros sobre os números naturais. Seja n um símbolo de constante novo (ausente de *L*) e seja Δ o conjunto das seguintes sentenças:
  - $n > 0$
    $n > 1$

$n > 1 + 1$
$n > (1 + 1) + 1$
:

- Seja $\Gamma' = \Gamma \cup \Delta$.
- Na interpretação pretendida para *L* (a própria aritmética) a teoria Γ' é inconsistente, uma vez que o conjunto Δ de sentenças afirma que n é maior que todos os números naturais e, de acordo com a aritmética, não há nenhum número natural maior que todos os outros.
- No entanto, do ponto de vista da lógica de primeira ordem, veremos que Γ' é perfeitamente consistente. O Teorema da Compacidade nos ajudará a perceber este fato. Vejamos:
    - Basta notarmos que qualquer subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma'$ será satisfatível em alguma estrutura de primeira ordem.
    - Isso porque Γ_0 conterá um número finito de sentenças de Γ (todas elas verdades sobre os números naturais) e um número finito de sentenças de Δ, que têm a forma $n > k$, onde k é uma abreviação para $(((1 + 1) + 1) + ... + 1)$ em que aparecem k vezes a constante para o número um.
    - Claramente podemos tornar todas estas sentenças de Γ_0 verdades sobre os números naturais, bastando para isso que interpretemos a constante n como qualquer número m maior que a quantidade de uns da maior sentença de Δ que pertence a Γ_0.
    - Ou seja. Γ_0 e qualquer outro subconjunto finito de Γ' é satisfatível. Então, pelo Teorema da Compacidade, Γ' é satisfatível.
- Isso implica que existe alguma estrutura de primeira ordem $\mathfrak{M}$ para *L* que torna verdadeiros todos os axiomas de PA e que satisfaz Γ'.
- Então no domínio de $\mathfrak{M}$, além de elementos correspondentes a cada um dos números naturais (ou os próprios números naturais, caso queiramos), está também um determinado elemento que é maior do que todos os números naturais (já que $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Delta \subseteq \Gamma'$).
- Este tal elemento, maior do que todos os números naturais, certamente não faz parte da própria aritmética. Portanto, $\mathfrak{M}$ é um modelo não-standard. ♦

Interpretando os Modelos Não-Standard para a Aritmética

- Novamente estamos diante de uma situação muito intrigante. Quase paradoxal. Mas o que este teorema mostra é, simplesmente, que não há como caracterizarmos univocamente o domínio do discurso pretendido da aritmética usando apenas axiomas escritos em linguagem de primeira ordem.
    - As linguagens de primeira-ordem não são expressivas o suficiente para caracterizar univocamente a aritmética. O mesmo se dá, como mostrado pelo Teorema de Löwenheim-Skolem, com relação a teoria dos conjuntos.
- Usando apenas axiomas em linguagem de primeira-ordem não conseguimos excluir a existência de "números naturais" (ou seja membros do domínio de PA) que estejam infinitamente longe do zero. O número n da prova acima é um destes números.
- A distinção entre *estar **finitamente** longe de zero*, propriedade de todos os números naturais legítimos, e *estar **infinitamente** longe de zero*, propriedade que os números naturais genuínos não possuem, mas que números como n da prova acima possui, não é exprimível em primeira ordem.

- Esta não é uma limitação específica da aritmética de primeira ordem, mas das linguagens de primeira-ordem em geral. Não há como, em primeira-ordem, definirmos qualquer tipo de predicado que separe quantidades finitas de quantidades infinitas.
    - A distinção entre finito e infinito é inefável em primeira-ordem.
- **Um exemplo**: imagine que definamos na linguagem da teoria de conjuntos de primeira ordem ZFC um predicado ConjuntoFinito(x). O Teorema da Compacidade pode ser utilizado para mostrar que há estruturas de primeira ordem que satisfazem ZFC, nas quais este predicado será verdadeiro de algum conjunto infinito!! Ou seja. Não há como definirmos corretamente tal predicado.
- **Um outro exemplo**: considere uma linguagem de primeira ordem criada para falarmos sobre relações de parentesco (pai, mãe, irmão, cunhada,...). Suponha que esta linguagem tenha o predicado Ancestral(x, y). Se tentarmos definir o significado deste predicado através de axiomas, vamos certamente falhar! Isto porque para que um indivíduo seja ancestral de outro, deve haver uma quantidade finita de parentes entre eles. Mas não conseguimos especificar esta restrição em primeira-ordem. O Teorema da Compacidade nos mostra que sempre haverá alguma estrutura em que x é ancestral de y e x e y estão separados por uma quantidade infinita de parentes. Portanto, não há como axiomatizar de modo perfeito o predicado "é um ancestral de".

(3) O Teorema da Incompletude de Gödel

O teorema que mostra a existência de modelos não standard da aritmética mostra um tipo de incompletude de FOL. Há, no entanto, uma forma muito mais profunda de incompletude que foi descoberta por Kurt Gödel poucos anos após ele ter provado pela primeira vez o Teorema da Completude.

Os estudantes muitas vezes se confundem com o fato de que Gödel primeiro provou algo chamado de Teorema da Completude, mas então deu meia volta e provou o Teorema da Incompletude. Será que ele não se decide? Na verdade, os sentidos da palavra "*completude*" envolvidos nestes dois teoremas são bastante diferentes. Lembremos que o Teorema da Completude nos diz que as regras de nosso sistema formal capturam adequadamente a noção de conseqüência de primeira-ordem. O Teorema da Incompletude, ao contrário, envolve a noção de completude formal (ou conjunto de sentenças formalmente completo) que introduzimos anteriormente. Lembre-se que uma teoria Γ é *formalmente completa* se para cada sentença S de sua linguagem, ou $\Gamma \vdash S$ ou $\Gamma \vdash \neg S$. (Sabemos, pelos Teoremas da Correção e Completude, que isso é o mesmo que dizer que $\Gamma \models S$ ou $\Gamma \models \neg S$.

No início do século XX, os lógicos analisavam a matemática através de teorias axiomáticas, como a aritmética de Peano, e sistemas formais como F. O objetivo era a obtenção de uma axiomatização formalmente completa para a aritmética, uma que nos permitisse provar todas e apenas as sentenças verdadeiras sobre os números naturais. Esta era uma parte importante de um projeto ambicioso conhecido como Programa de Hilbert, devido ao seu principal proponente David Hilbert. No início da década de 1930, muito progresso já havia sido feito no Programa de Hilbert. Todos os teoremas conhecidos sobre a aritmética tinham sido demonstrados utilizando axiomatizações relativamente simples, como a aritmética de Peano. Além disso, o lógico *Mojzesz Pressburger* provou que qualquer sentença da linguagem da aritmética de primeira ordem que não mencionasse a multiplicação poderia ser provada a partir dos axiomas de Peano.

O Teorema da Incompletude de Gödel mostrou que este progresso inicial era enganoso e que, de fato, a meta do Programa de Hilbert jamais poderia ser atingida. Um caso especial do teorema de Gödel poderia ser indicado como se segue:

Teorema (Teorema da Incompletude de Gödel para PA) A Aritmética de Peano não é formalmente completa.

A prova deste teorema, que apenas descreveremos abaixo, mostrará que este resultado tem aplicação muito mais abrangente do que apenas a axiomatização de Peano, ou o sistema formal F. De fato, ela mostra que nenhuma extensão razoável tanto dos axiomas da aritmética quanto dos sistemas formais de primeira ordem resultará em uma teoria da aritmética formalmente completa, em um sentido bastante preciso do termo "razoável". Tentaremos apresentar uma idéia geral da prova.

Sistema de Codificação

Seu primeiro principal *insight* foi perceber que um sistema de símbolos pode ser representado em um esquema de codificação, onde números são utilizados para representar cada símbolo individual do sistema. Tal codificação dos símbolos pode ser estendida para *wff*s, de tal forma que qualquer *wff* pode também ser codificada representando um número natural. Expandindo mais ainda esta codificação, seqüências finitas de *wff*s e, por conseguinte, *provas*, também podem ser codificadas, de modo a que cada prova represente um número natural.

Representabilidade

Os primeiros fatos que Gödel estabeleceu foram que todas as noções sintáticas importantes da lógica de primeira-ordem podem ser representadas na linguagem da aritmética de Peano. Por exemplo, os seguintes predicados são representáveis:

- n é o código de uma wff,
- n é o código de uma sentença,
- n é o código de um axioma da aritmética de Peano,
- n e m são os códigos de duas sentenças nas quais a segunda se segue da primeira por uma aplicação da regra $(\wedge\mathsf{Elim})$,
- n é o código de uma prova em F.
- n é o código da prova de uma sentença cujo código é m.

Dizer que estas sentenças são representáveis na aritmética de Peano é dizer algo bastante forte. É dizer que:

(a) Todas estas sentenças são traduzíveis, via codificação, em sentenças da aritmética sobre números naturais. Ou seja, dizer que "n é o código de uma sentença" equivale a dizer que o número n possui determinada propriedade aritmética. Ou seja, cada uma das "propriedades sintáticas" tais como *ser uma wff*, *ser uma sentença*, *ser uma prova*, *ser uma sentença que se segue de uma outra por eliminação da implicação*, *ser uma prova sem premissas de tal sentença*, ... são traduzidas, através da codificação, em uma propriedade sobre números naturais.

(b) Os axiomas de PA e regras de prova do sistema F nos permitem provar apenas predicados verdadeiros sobre estas propriedades aritméticas que representam noções sintáticas. Em outras palavras, as noções sintáticas importantes da lógica (algumas exemplificadas nas sentenças acima) que são representáveis na linguagem da aritmética de Peano pertencem a um subconjunto Rec de sentenças da linguagem de PA que é correto: seja $\mathfrak{N}_a$ a estrutura pretendida de PA, ou seja, a própria aritmética. Então: $(\mathsf{S} \in \mathsf{Rec} \text{ e } \mathsf{PA} \vdash \mathsf{S}) \Rightarrow \mathfrak{N}_a \models \mathsf{S})$.

Uma grande quantidade de trabalho cuidadoso deve ser feito para comprovar estas afirmações (*a*) e (*b*) acima. Tal trabalho representa a parte maior e mais trabalhosa da prova de Gödel. Em nossa explicação aqui não entraremos nos detalhes sobre como ele obteve estes resultados.

O Lema Diagonal

O segundo *insight* principal de Gödel foi o de que, via codificação, é possível obter sentenças que expressam fatos sobre elas próprias. Este fato é conhecido como *Lema Diagonal*, que estabelece que:

Lema (Lema Diagonal) Para cada *wff* $\mathsf{P}(x)$ com uma única variável livre, há um número n que é o código da sentença $\mathsf{P}(n)$.

Trocando em miúdos. Seja $\mathsf{P}(x)$ uma propriedade aritmética qualquer expressa na linguagem de PA. Para cada número natural m, $\mathsf{P}(m)$ é uma sentença de PA que, de acordo com a codificação de Gödel, possui um código, um número natural, digamos r, relacionado a ela. O que o Lema da Diagonal estabelece é que qualquer que seja a *wff* $\mathsf{P}(x)$, há um certo número n tal que o código (número de Gödel) da sentença $\mathsf{P}(n)$ é o próprio número n. Então, a sentença $\mathsf{P}(n)$ cujo código é o próprio número n pode ser interpretada como representando uma afirmação auto-referencial:

- *Esta sentença tem a propriedade expressada por* P.

Dependendo de qual seja a propriedade que P expressa, algumas destas sentenças serão verdadeiras ($\mathfrak{N}_a \models \mathsf{P}(n)$) e outras falsas ($\mathfrak{N}_a \not\models \mathsf{P}(n)$). Por exemplo, as versões formais das seguintes sentenças:

- *Esta sentença é uma fórmula bem formada;*
  Esta sentença não tem variáveis livres.

São sentenças verdadeiras, enquanto que são falsas as versões formais de:

- *Esta sentença é uma prova;*
  Esta sentença é um axioma da aritmética de Peano.

A Sentença G de Gödel

Agora considere a versão formal da seguinte sentença, cuja existência é garantida pelo Lema da Diagonal:

(G) *Não há prova para esta sentença cujas premissas sejam instâncias dos axiomas da aritmética de Peano.*

A sentença acima é chamada de G, em homenagem a Gödel. Vamos provar que apesar dela ser verdadeira, não há prova dela em PA. Ou seja, vamos provar que: $\mathfrak{N}_a \models \mathsf{G}$ e $\mathsf{PA} \not\vdash \mathsf{G}$.

Lema (da Sentença G) A sentença G é uma verdade aritmética, mas não há prova dela em PA: $\mathfrak{N}_a \models \mathsf{G}$ e $\mathsf{PA} \not\vdash \mathsf{G}$.

Prova:

- Vamos fazer a prova em duas etapas. Na primeira provaremos que G é verdadeira. Na segunda provaremos que não há prova de G em PA.

- ETAPA 1: (provaremos que G é verdadeira: $\mathfrak{N}_a \models G$)
- Suponha, por absurdo, que

  (1) G não é verdadeira ($\mathfrak{N}_a \not\models G$).
- Então, como G é falsa e afirma que não há prova de G em PA, é porque, de fato,

  (2) há prova de G em PA. ($PA \vdash G$)
- Mas como os axiomas de PA são verdadeiros na aritmética ($\mathfrak{N}_a \models PA$) e F é um sistema formal correto (provamos o Teorema da Correção para F: $PA \vdash G \Rightarrow PA \models G$), então, tudo que é provável em F é verdadeiro. Logo, por (2), G é verdadeira ($\mathfrak{N}_a \models G$). Mas isso é contraditório com a hipótese do absurdo (1). Portanto, descartamos a hipótese do absurdo e concluímos que G é verdadeira. ($\mathfrak{N}_a \models G$)
- ETAPA 2: (provaremos que não há prova de G em PA: $PA \not\vdash G$)
- Como G é verdadeira ($\mathfrak{N}_a \models G$) e pode ser interpretada como afirmando que não há prova para G cujas premissas sejam instâncias dos axiomas de PA, então é claro que não há prova de G em PA ($PA \not\vdash G$). ♦

O Teorema da Incompletude de Gödel é uma conseqüência imediata deste lema. Vejamos:

Teorema (Teorema da Incompletude de Gödel para PA) A Aritmética de Peano não é formalmente completa. (existe uma sentença G da linguagem de PA tal que $PA \not\vdash G$ e $PA \not\vdash \neg G$)

Prova:

- O lema anterior nos mostrou que a sentença G, expressa na linguagem da aritémtica de PA é verdadeira mas que não há prova dela em PA. ($\mathfrak{N}_a \models G$ e $PA \not\vdash G$)
- Consideremos então $\neg G$. Como G é verdadeira, é claro que $\neg G$ é falsa. ($\mathfrak{N}_a \models G \Rightarrow \mathfrak{N}_a \not\models \neg G$).
- Além disso, sabemos que $\mathfrak{N}_a \models PA$. Logo, é claro que $PA \not\models \neg G$.
- Logo, pela contrapositiva do Teorema da Correção, $PA \not\vdash \neg G$.
- Ou seja, $PA \not\vdash G$ e $PA \not\vdash \neg G$. Logo, PA não é formalmente completa. ♦

Aplicando o Teorema a Outras Teorias

Claro que não há nada de "sagrado" sobre os axiomas de Peano. Tendo encontrado uma sentença G verdadeira, mas que não pode ser provada nesta teoria, podemos sempre adicioná-la ou adicionar alguma outra sentença que nos ajudaria a provar G como um novo axioma e resolver o problema da incompletude.

No entanto, Gödel mostrou que tal estratégia não daria certo. Isso porque o argumento de Gödel não depende de nenhuma fraqueza da aritmética de Peano, mas assenta-se em sua força. Enquanto os axiomas de uma teoria T extensão de PA forem verdadeiros (na aritmética) e o predicado "n é o código de um axioma de T" for representável em T, então o argumento completo de Gödel pode ser repetido para esta nova teoria, gerando outra sentença que não pode ser provada no sistema extendido T.

O Teorema da Incompletude de Gödel é um dos teoremas mais importantes da lógica. Suas conseqüências continuam a ser entendidas e exploradas ainda hoje, passados mais de 70 anos de sua publicação.

O que apresentamos aqui foi um simples esboço de sua prova. A obtenção do resultado de representabilidade, com as propriedades (*a*) e (*b*) descritas acima criou toda uma nova área de pesquisa que estende-se da lógica, para a matemática e computação. As conseqüências matemáticas e filosóficas do Teorema de Gödel continuam a suscitar muitos estudos. Se vocês tiverem interesse em entender melhor este fascinante assunto, leituras extras são essenciais. Aqui vão algumas recomendações:

NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. 2.ed. São Paulo: Ed. Perspectiva, 2001.

HOFSTADTER, D. R. *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*. New York: Vintage Books, 1979.

SMULLYAN, R. M. *Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel*. Oxford University Press, 1988.

SMULLYAN, R. M. *Godel's Incompleteness Theorems*. Oxford Logic Guides V. 19, 1992.