AULA 3

LPL 14.1: Quantificação Numérica

Declarações Numéricas

- Declarações que fazem uso explícito de números.

Três Tipos

- **Pelo menos dois** livros chegaram esta semana.
- **No máximo dois** livros estão faltando na prateleira.
- **Exatamente dois** livros estão sobre a mesa.

Restrições de FOL

- As linguagens de primeira ordem em geral não nos permitem falar diretamente sobre números, apenas sobre elementos de nosso domínio de discurso.
- A **linguagem dos blocos**, por exemplo, fala apenas sobre blocos, não sobre números.
    - Os **nomes** e **variáveis** na linguagem dos blocos se referem a blocos, não a números.
- No entanto, é possível expressar estes três tipos de declarações numéricas em FOL.

Quine e o Compromisso Ontológico [COMENTÁRIO PARALELO]

- Um importante filósofo contemporâneo W. V. O. Quine, utilizou a formalização lógica como uma ferramenta para tratar de questões de ontologia. (O Estudo do que (que tipo de coisa) Existe).
- Ele defende que as teorias só se comprometem, ontologicamente, com as entidades que são quantificáveis!
- Se, em uma teoria, conseguimos “falar” de algo sem que se necessite tomá-lo objeto quantificável, então esta teoria não tem nenhum compromisso com a existência deste algo!!
- **Existir é ser o valor de uma variável quantificada existencialmente!!!**
- Como é possível, como veremos, fazer declarações numéricas sem a necessidade de que os números sejam objetos sobre os quais aplicaremos quantificadores, ou seja, sem que os números façam parte do domínio do discurso, então, não temos compromisso ontológico com a existência objetiva dos números. → **ARGUMENTO CONTRA O REALISMO EM MATEMÁTICA**.

NOMES e VARIÁVEIS Distintos, não implicam em Objetos Distintos

- Um mesmo objeto pode ter mais de um nome.
- Um mesmo objeto também pode ser referido por variáveis diferentes.
- Exemplo: as seguintes sentenças podem ser verdadeiras em um mundo com apenas um cubo.

- $Cube(a) \wedge Small(a) \wedge Cube(b)$
- $\exists x\ \exists y\ [Cube(x) \wedge Small(x) \wedge Cube(y)]$

<u>Pelo Menos *n*</u>

- É preciso garantir que as variáveis sejam diferentes: (por exemplo)
  - $Cube(a) \wedge Small(a) \wedge Cube(b) \wedge Large(b)$
  - $\exists x\ \exists y\ [Cube(x) \wedge Small(x) \wedge Cube(y) \wedge LeftOf(x,y)]$
- Uma maneira mais direta é simplesmente dizer que os objetos são diferentes:
  - $\exists x\ \exists y\ [Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y]$
- Esta sentença afirma que há pelo menos dois cubos.
- Para dizer que há pelo menos três cubos precisamos de um quantificador e algumas desigualdades a mais:
  - $\exists x\ \exists y\ \exists z\ [Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z) \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$
- Dizer que há pelo menos 4 exige 4 $\exists$s e 6 desigualdades (=3+2+1).
- Dizer que há pelo menos n exige n $\exists$s e (n-1)+(n-2)+...+1 desigualdades.

<u>No Máximo *n*</u>

- Como dizer que *há no máximo dois cubos*?
- Uma primeira maneira é negar que haja pelo menos 3 cubos! Você percebe isso?
  - $\neg\exists x\ \exists y\ \exists z\ [Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z) \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z]$
- Aplicando algumas equivalências (já conhecidas) obtemos:
  - $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z)) \rightarrow (x=y \vee x=z \vee y=z)]$
- Esta segunda forma será nossa forma oficial de expressar ‘<u>no máximo dois</u>’.
- Note que para traduzir o determinante “***<u>pelo menos n</u>***” em FOL necessitamos de ***n*** quantificadores <u>existenciais</u>, enquanto para traduzir o determinante “***<u>no máximo n</u>***” precisamos de ***n+1*** quantificadores <u>universais</u>.

<u>Exatamente *n*</u>

- Para expressar que *há exatamente dois cubos*, poderíamos utilizar a seguinte paráfrase, construída com os determinantes anteriores:
  - *Há pelo menos dois cubos e no máximo dois cubos.*
- Transcrevendo para FOL, teríamos a seguinte sentença (quilométrica)

- $\exists x \exists y [Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y] \wedge$
  $\forall x \forall y \forall z [(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z)) \rightarrow (x=y \vee x=z \vee y=z)]$

- A mesma afirmação pode ser escrita mais sucintamente como:
  - $\exists x \exists y [Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (Cube(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$
- Aqui estamos dizendo que há dois objetos diferentes, ambos cubos, e qualquer cubo é um destes dois.
- Uma forma equivalente e ainda mais sucinta é: (exercícios pedem prova!)
  - $\exists x \exists y [x \neq y \wedge \forall z (Cube(z) \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$
  - $\exists x \exists y \forall z [x \neq y \wedge (Cube(z) \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$ - na forma PRENEX
- De maneira geral, dizer que há "***exatamente n***" objetos satisfazendo alguma condição requer ***n+1*** quantificadores, ***n*** existenciais seguidos de **1** universal.
- FAZER EM CASA O EXPERIMENTE DA PG. 368-9.

Notação - Abreviada

- $\exists^{\geq n}x\ P(x)$ denota *"Há pelo menos n objetos satisfazendo P(x)"*
- $\exists^{\leq n}x\ P(x)$ denota *"Há no máximo n objetos satisfazendo P(x)"*
- $\exists^{!n}x\ P(x)$ denota *"Há exatamente n objetos satisfazendo P(x)"*

- É importante lembrar que esta notação **não** é parte oficial da linguagem FOL, mas apenas uma abreviação para sentenças muito mais longas.

Exatamente 1

- Por ser muito usado, este caso merece atenção especial.
- A afirmação de que há exatamente um (um único) objeto satisfazendo determinada propriedade P(x) pode ser expressa em FOL pela seguinte sentença, desde que y não ocorra anterioremente na wff P(x).
  - $\exists x [P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y)]$ que é equivalente a:
  - $\exists x \forall y (P(y) \leftrightarrow x = y)$
- A notação abreivada, de acordo com o que dissemos acima, seria:
  - $\exists^{!1}x\ P(x)$
- No entanto, este tipo de sentença é tão utilizada, que tem uma abreviação própria, mais simples:
  - $\exists! x\ P(x)$ denota "*Há um único x tal que P(x)*".

Voltando às Expressões QAB

- Queríamos aprender como formalizar expressões do tipo ***QAB***, onde ***Q*** fosse um determinante numérico, ***A*** fosse um nome comum. Mas vimos apenas como expressar declarações da forma: Há (pelo menos / no máximo / exatamente) ***n*** coisas satisfazendo a propriedade ***P***.

- A partir deste ponto, é fácil expressar a forma ***QAB*** desejada.
- Por exemplo, para dizer: "*Pelo menos n cubos são pequenos*", dizemos "*Há pelo menos n coisas que são cubos pequenos*". E assim por diante.
- Apesar de parecer óbvia, esta observação é importante, pois veremos que nem todos os determinantes satisfarão esta propriedade, o que trará conseqüências importantes para a <u>teoria geral da quantificação</u>.

AULA 4

LPL 14.2: Provando Proposições Numéricas

- Uma vez que declarações numéricas podem ser expressas em FOL, então, podemos utilizar os nossos métodos de provas anteriormente estudados para provar declarações numéricas.
- Mas, como vimos, as declarações numéricas são bastante complexas na notação FOL, o que pode tornar suas provas terrivelmente complicadas.
- EXEMPLO:
    - Suponha, por exemplo, que você saiba que há exatamente 2 laboratórios de lógica, e que cada um tem exatamente 3 computadores.
    - Suponha também que todos os computadores disponíveis para estudar lógica estão em algum laboratório de lógica.
    - Destas hipóteses é bastante fácil perceber que há exatamente 6 computadores disponíveis para estudar lógica. Como seria uma prova disso?
- PROVA:
    - É suficiente provar que há pelo menos 6 computadores e no máximo 6 computadores.
    - Para provar que há no máximo 6 computadores, basta notarmos que cada computador deve estar em um dos dois laboratórios, e que cada laboratório contém no máximo 3. Logo pode haver no máximo 6 computadores (2 x 3 = 6).
    - Para provar que há pelo menos 6, notamos que cada laboratório contém pelo menos 3 computadores. Mas agora precisamos de outra hipótese que não está explicitamente declarada no exercício. A hipótese é que nenhum computador pode estar em 2 laboratórios. Com este fato, sabemos que deve haver pelo menos 6 computadores.
    - Portanto, se há no máximo 6 e pelo menos 6 computadores disponíveis para estudar lógica, então há exatamente 6 computadores disponíveis.
- Esta longa prova de um fato bastante óbvio ilustra duas coisas:
- (1) Para provar uma declaração numérica da forma '*existe exatamente n objetos que satisfazem a propriedade P* ($\exists^{!n}$x P(x)) *precisamos provar duas coisas:*
    - *(a) Que há pelo menos n objetos.*
    - *(b) Que há no máximo n objetos.*
    - Você pode pensar nisso como mais um <u>método de prova</u>!

- (2) Se traduzirmos nossas premissas e nossa conclusão para FOL, de modo a construir uma prova formal, as coisas vão ficar **terrivelmente complicadas!**
    - Nós certamente perderíamos de vista o fato simples e básico que faz com que a prova funcione, a saber, que 2 x 3 = 6.
    - Isso, porque, ao invés de declarar explicitamente este fato, como fizemos na prova informal, ele apareceria escondido nos detalhes combinatórios da prova!
    - Ainda que seja possível fazer tal prova formal, ninguém na prática a faria assim.
    - Este problema ocorreria devido ao modo complicado com que as declarações numéricas são traduzidas para FOL.
    - Se adicionarmos quantificadores numéricos a FOL, poderíamos ser capazes de fazer provas que correspondem muito melhor a nossas provas intuitivas.
    - E isso não alteraria o poder expressivo teórico de FOL, pois vimos que as expressões numéricas são traduzíveis na linguagem FOL como a conhecemos. (este caso é semelhante ao do $\rightarrow$, que não é necessário, não aumenta o poder expressivo dos conectivos booleanos, mas apenas simplifica as provas formais).
- Um caso particular importante do método de prova da existência de exatamente *n* coisas satisfazendo uma propriedade **P** é quando *n*=1.
    - Provar que $\exists!x$ **P**(x) exige que provemos duas coisas
    - (a) <u>**existência**</u>: há pelo menos um objeto x que satisfaz P(x).
    - (b) <u>**unicidade**</u>: há no máximo um objeto que satisfaz P(x).
- <u>EXEMPLO</u>: Vamos provar que $\exists!x$ (Even(x) $\wedge$ Prime(x))
- <u>PROVA</u>:
    - Primeiro provaremos a <u>existência</u>, ou seja, que existe um número primo e par. Isto é feito simplesmente notando que 2 é primo e par. Então, por generalização existencial, há um primo par.
    - Em seguida, provaremos a <u>unicidade</u>, ou seja, provaremos que para cada número x, se x é primo, então x = 2 através do método da prova condicional geral.
    - Suponha, então, que x é um número par e primo. Uma vez que ele é par, ele é divisível por 2. Mas uma vez que é primo é divisível apenas por si próprio e por 1. Então x só pode ser 2.
    - Portanto, qualquer que seja x, se x for primo e par, então x = 2. Ou seja, provamos a unicidade. O número 2 é o único par primo.
- Falta apenas um método de prova (a prova por indução – Cap 16) para que tenhamos visto todos os principais métodos de prova.
- Nós não introduziremos formalmente quantificadores numéricos em FOL. Continuaremos usando nossas abreviações.

AULA 5

LPL 14.3: ‘*O*’, ‘*Ambos os*’ e ‘*Nenhum dos dois*’

- A despeito da familiaridade destes determinantes, suas propriedades lógicas são bastante sutis e além de serem motivo de controvérsias.
- EXEMPLO:
    - *O elefante em meu guarda-roupas não está amarrotando minhas camisas*.
- Na circunstância (real) em que não há elefante nenhum em meu guarda-roupas, a sentença acima é simplesmente falsa? Ou há algo mais errado com ela?
- Se ela for falsa, então é de se esperar que sua negação seja verdadeira.
- Mas sua negação parece estar sustentando que **o elefante em meu guarda-roupas está, de fato, amarrotando minhas camisas**.
- Situações problemáticas como esta também ocorrem com os determinantes ‘*ambos os*’ e ‘*nenhum dos dois*’.
    - *Ambos os elefantes em meu guarda-roupas não estão amarrotando minhas camisas*.
    - *Nenhum dos dois elefantes em meu guarda-roupas está amarrotando minhas camisas*.
- São falsas, verdadeiras ou o que, estas sentenças, se não há elefantes em meu guarda-roupas, ou se há três elefantes em meu guarda-roupas?
- No início do século XX, **Bertrand Russell** propôs a seguinte interpretação para sentenças deste tipo:
    - A sentença ‘*O cubo é pequeno*’ deveria ser interpretada como uma asserção de que:
        - Há exatamente um cubo e ele é pequeno.
- De maneira mais geral a análise de Russell defende a seguinte tradução. Sentenças da forma:
    - ‘*O **A** é **B***’
- devem ser traduzidas em FOL para:
    - $\exists x\ [A(x) \wedge \forall y\ (A(y) \rightarrow x = y) \wedge B(x)]$
- Da mesma forma as sentenças:
    - *Ambos os cubos são pequenos*.
    - *Nenhum dos dois cubos são pequenos*.
- Segundo a análise de Russell deveriam ser interpretadas como afirmando, respectivamente que:
    - *Há exatamente dois cubos e eles são pequenos*.
    - *Há exatamente dois cubos e cada um deles não é pequeno*.
- De maneira mais geral, na análise de Russell temos:
    - *Ambos os **A**s são **B**s*.

- *Nenhum dos dois **A**s é **B***.

- São traduzidas para FOL como:
  - $\exists^{!2}x\ A(x) \wedge \forall x\ [A(x) \rightarrow B(x)]$
  - $\exists^{!2}x\ A(x) \wedge \forall x\ [A(x) \rightarrow \neg B(x)]$

- Note que com este tipo de interpretação, a negação da sentença:
  - *O elefante em meu guarda-roupas não está amarrotando minhas camisas*.

- Não é:
  - *O elefante em meu guarda-roupas está amarrotando minhas camisas*.

- Mas é:
  - *Não é verdade que há exatamente um elefante em meu guarda*-roupas e que ele está amarrotando minhas camisas.

- Que, aplicando DeMorgan, fica:
  - *Ou não há exatamente um elefante em meu guarda-roupas, ou (se há) ele não está amarrotando minhas camisas.*

- Note que esta versão da negação de nossa sentença original é bastante mais plausível do que o que parecia à primeira vista.

- **DESCRIÇÕES DEFINIDAS:** é o nome que damos a frases nominais do tipo "*O **A***".

- O que acabamos de ver foi a **análise russelliana das descrições definidas** estendida aos determinantes '*ambos os*' e '*nenhum dos dois*', que o próprio Russell não tratou.

- É apenas a forma superficial das sentenças com '*ambos os*' e com '*nenhum dos dois*' que fazem parecer que uma é a negação da outra.

- Mas na verdade, se não há elefantes em meu guarda-roupas, ou se há três, ambas as sentenças serão falsas. Uma não é a negação da outra!

- **CRÍTICAS À ANÁLISE DE RUSSELL:** (P. F. Strawson)
  - ***O** elefante em meu guarda-roupas está amarrotando minhas camisas*.
  - ***O** elefante em meu guarda-roupas não está amarrotando minhas camisas*.
  - *Não é o caso que **o** elefante em meu guarda-roupas está amarrotando minhas camisas*.

- Parece que nenhuma destas sentenças é apropriada se não há nenhum elefante em meu guarda-roupas.

- Parece que todas elas pressupõem que há um único elefante em meu guarda-roupas.

- De acordo com **Strawson**, quando afirmamos sentenças com estas setamos, de fato, pressupondo isso, sem, no entanto, afirmar explicitamente isso.

- Sentenças deste tipo só podem ser usadas para fazer uma declaração quando esta pressuposição é satisfeita.

- Caso contrário, a sentença simplesmente é inadequada. É como usar uma sentença de FOL com um nome ***b*** para descrever um mundo em que nenhum objeto tem o nome ***b***.
- Se Strawson está correto, então não há nenhuma **forma geral** de traduzir os determinantes "*O*", "*AMBOS OS*" E "*NENHUM DOS DOIS*" para FOL, pois as sentenças de FOL que não têm nomes sempre têm valores de verdade.
- **HÁ RÉPLICAS À CRÍTICA DE STRAWSON**:
- Argumentou-se que a sugestão de que existe o objeto que satisfaz **A** quando se diz "*o **A***" (como em '*o elefante em meu guarda-roupa*') é apenas uma **insinuação social**, e não uma parte integrante do significado lógico da sentença.
- Se for assim, o **teste da cancelabilidade de Grice** deveria funcionar. Vejamos. A seguinte sentença é coerente ou não?
    - *O elefante em meu guarda-roupas não está amarrotando minhas camisas. De fato, não há elefante em meu guarda-roupas*.
- Algumas pessoas defendem que, dita com a entonação correta, a sentença faz sentido perfeitamente. Outros discordam.
- **PARA TERMINAR**: como dissemos, estas questões são bastante sutis e controversas. Não há nenhuma teoria universalmente aceita sobre como funcionam logicamente estes determinantes.
- O que podemos dizer é que a análise de Russell é representa o máximo que podemos conseguir com FOL, que é importante e que captura pelo menos alguns usos destes determinantes.
- VER *remember* na pg 381.

AULA 6

LPL 14.4: Adicionando Outros Determinantes a **FOL**

- Até agora vimos alguns determinantes que podem, de certa forma, ser expressados em FOL:
    - Pelo menos ***n***...
    - No máximo ***n***...
    - Exatamente ***n***...
    - O...
    - Ambos os...
    - Nenhum dos dois...

  na interpretação de Russell (não na de Strawson!)
- Mas há muitos determinantes simplesmente inefáveis em **FOL**.

'A MAIORIA' e 'MAIS DA MATADE'

- Um exemplo simples é o determinante *'A maioria*', como em: '*A maioria dos cubos é grande*'.
- Há dois problemas com o determinante '*a maioria*':

- (1) O significado de ‘a maioria’ é um pouco indeterminado:
    - *A maioria dos cubos é grande.*
  - Claramente implica
    - *Mais da metade dos cubos são grandes.*
  - Mas e o inverso, é verdadeiro? A segunda implica a primeira? Nossas intuições divergem neste ponto.
- (2) Mesmo se interpretamos ‘*a maioria*’ como significando ‘*mais da metade*’, ainda assim este determinante é inefável em FOL.
  - Pois, mesmo tendo um significado preciso, ‘*mais da metade*’ também não pode ser expresso em FOL.

<u>‘MAIS DA MATADE’ É INEFÁVEL EM FOL</u>

- Considere, por exemplo, a sentença:
  - *Mais da metade dos dodecaedros são pequenos*.
- Considere:
  - **A**: o conjunto dos dodecaedros pequenos;
  - **B**: o conjunto dos dodecaedros que não são pequenos.
- A sentença acima diz apenas que o conjunto **A** é maior do que **B** (tem mais elementos)
  - Isso sem declarar nada sobre quantos objetos há nestes conjuntos ou no domínio do discurso.
- Poderíamos tentar a seguinte tradução desta sentença em FOL:
  - $[\exists x\, A(x) \wedge \forall x\, \neg B(x)] \vee [\exists^{\geq 2} x\, A(x) \wedge \exists^{\leq 1} x\, B(x)] \vee [\exists^{\geq 3} x\, A(x) \wedge \exists^{\leq 2} x\, B(x)] \vee ...$
- Onde:
  - $A(x)$ é uma abreviação para $Dodec(x) \wedge Small(x)$
  - $B(x)$ é uma abreviação para $Dodec(x) \wedge \neg Small(x)$
- Sem um limite superior para o número de objetos esta sentença seria infinitamente longa, o que **não é permitido** em FOL.
- Há como provar matematicamente a inefabilidade de ‘*mais da metade*’ em FOL. É possível provar a seguinte propriedade:
  - Para qualquer sentença **S** da linguagem dos blocos, se **S** for verdadeira em todos os mundos em que <u>mais da metade</u> dos dodecaedros são pequenos, então, **S** também será verdadeira em algum mundo em que <u>menos da metade</u> dos dodecaedros são pequenos.
- Isso prova que não há como expressar a noção geral de ‘*mais da metade*’ em FOL através de uma sentença **S**, pois ou **S** será falsa onde deveria ser verdadeira ou o contrário!

- **TEORIA DE MODELOS**: este tipo de resultado é estudado em um ramo da lógica conhecido como Teoria de Modelos, onde se estuda a lógica através de estruturas matemáticas em que as sentenças de FOL e as propriedades de validade de argumentos, verdade lógica, consistência de conjuntos de sentenças,... são traduzidas em termos de propriedades matemáticas destas estruturas.
  - A Teoria de Modelos **embute** a lógica na matemática e estuda as propriedades, limites e características da lógica através do estudo das propriedades, limites e características das teorias matemáticas que representam a lógica.
- **(VOLTANDO)** Nada nos impede, no entanto, de **enriquecer FOL** para incluir um determinante que expresse o conceito de '*mais da metade*', ou o conceito '*a maioria*'.
  - Ao fazer isso, no entanto, estamos abandonando a lógica que chamamos de '*lógica clássica*', e nos aventurando em extensões da lógica clássica.
  - Muitas áreas de pesquisa e assuntos em aberto, ainda por descobrir e por serem devidamente analisados se colocam quando modificamos ou acrescentamos características à lógica clássica.
    - *HÁ MUITO CAMPO PARA PESQUISAS DE MESTRADO AQUI !!*

COMO NÃO ADICIONAR UM DETERMINANTE

- Vamos, primeiramente ver como **não** se deve adicionar um determinante ('*A Maioria*') a FOL.
  - Se **S** é uma *wff* e *v* é uma variável, então **Most *v* S** é uma *wff*, e qualquer ocorrência de *v* em **Most *v* S** chamaremos de ocorrência ligada.
  - Assim, diríamos que Most *v* S(x) é verdadeira em um mundo se e somente se há mais objetos do domínio que satisfazem S(x) do que os que não satisfazem.
  - Então, Most *x* Cube(x) diz, simplesmente, que a maioria das coisas são cubos.
- No entanto, **não é possível** utilizar Most como definido acima para dizer, por exemplo:
  - *A maioria dos dodecaedros são pequenos*.
- '*A maioria dos dodecaedros*' não tem nenhuma relação com '*a maioria das coisas*'.
- Com ∃ e ∀ conseguimos fazer paráfrases como estas:
- *Todo cubo é pequeno* e *Algum cubo é pequeno*
- *Qualquer coisa, se for um cubo é pequena* e *Há uma coisa que é um cubo e é pequena*
- Mas não há como parafrasear '*A maioria dos dodecaedros são pequenos*' usando '*A maioria das coisas é...*'
  - Afinal de contas, pode ser que a maioria dos cubos sejam pequenos, mesmo quando há milhões de tetraedros e dodecaedros em nosso domínio.

FORMA GERAL E FORMA ESPECIAL DOS DETERMINANTES

- Para qualquer determinante **Q**, sua **forma geral** é qualquer uso da forma:

- ***Q** A B* (**Q** As são Bs)

- Sua <u>**forma especial**</u> é qualquer uso da forma:
  - **Q** *coisas B* (**Q** coisas são Bs)
- Ver tabela pg. 385.
- <u>**REDUTIBILIDADE**</u>: quando a <u>forma geral</u> de um determinante pode ser reduzida a sua <u>forma especial</u>.
  - <u>DETERMINANTES REDUZÍVEIS</u>: todo, algum, nenhum e determinantes numéricos.
  - <u>DETERMINANTES NÃO REDUZÍVEIS</u>: a maioria, muitos, poucos, o.

<u>COMO ADICIONAR UM DETERMINANTE</u>

- Para adicionar o quantificador **Most** à nossa linguagem, precisamos adicionar sua <u>forma geral</u>.
- Assim, sua regra de formação envolve duas *wff* e uma variável para criar uma nova *wff*:
  - Se **A** e **B** são *wffs* e *v* é uma variável, então **Most v (A, B)** é uma *wff*, e qualquer ocorrência de ***v*** em **Most v (A, B)** é dita ser <u>ligada</u>.
- A *wff* **Most x (A, B)** é lida como: "***a maioria dos x que satisfazem A satisfazem B***".
- Dada a <u>forma geral</u>, é sempre possível expressar a <u>forma especial</u> [Most x (S)] da seguinte maneira:
  - **Most x (x = x, S)** que é lida como: "***a maioria das coisas x satisfaz S***"
- Assim, podemos definir **Most x (S)** como uma abreviação para **Most x (x = x, S)**
  - Isso significa que a inclusão da <u>forma geral</u> de um determinante a FOL garante que também a <u>forma especial</u> é exprimível.
- <u>**Fixando o Significado de Most**</u>
  - **Most x (A, B)** é verdadeiro em um mundo <u>se e somente se</u> a maioria dos objetos que satisfazem **A(x)**, satisfazem **B(x)**.
    - Onde estamos interpretando '*a maioria*' como mais da metade, ou seja: o número de objetos que satisfazem **A(x)** e **B(x)** é maior do que o número de objetos que satisfazem **A(x)** e **¬B(x)**.
- Assim a sentença "*A maioria dos dodecaedros são pequenos*" pode ser traduzida por:
  - **Most x (Dodec(x), Small(x))**
  - Sentença que será verdadeira em todos os mundos nos quais há mais dodecaedros que são pequenos do que dodecaedros que não são.
  - Note que **Most x (Small(x), Dodec(x))** significa algo bem diferente que a sentença anterior. <u>A ordem é importante</u>.

<u>ADICIONANDO UM DETERMINANTE QUALQUER</u>

- Qualquer determinante **Q** com significado pode ser adicionado a FOL de modo semelhante:

- Se **A** e **B** são *wffs* e ***v*** é uma variável, então **Q v (A, B)** é uma *wff*, e qualquer ocorrência de ***v*** em **Q v (A, B)** é dita ser <u>ligada</u>.

- A *wff* **Q x (A, B)** é lida como: "***Q dos x que satisfazem A satisfazem B***".
    - Ou, de modo mais simples: "***Q As são Bs***" – conforme abordamos no início do capítulo.

- Do mesmo modo, a <u>forma especial</u> é acessível partindo da <u>forma geral</u> definida acima:
    - **Q x (x = x, S)** é a <u>forma especial</u> de **Q**, lida como: "***Q das coisas x satisfaz S***"
    - **Q x (S)** é uma abreviação para **Q x (x = x, S)**

- Vejamos alguns exemplos:

1. **Few x (Cube(x), Small(x))** será verdadeira em um mundo *se e somente se* <u>**poucos**</u> cubos deste mundo forem pequenos.
2. **Many x (Cube(x), Small(x))** será verdadeira em um mundo *se e somente se* <u>**muitos**</u> cubos deste mundo forem pequenos.
3. **PeloMenosUmQuarto x (Cube(x), Small(x))** será verdadeira em um mundo *se e somente se* <u>**pelo menos um quarto**</u> dos cubos deste mundo forem pequenos.
4. **PeloMenosDois x (Cube(x), Small(x))** será verdadeira em um mundo *se e somente se* <u>**pelo menos dois**</u> cubos deste mundo forem pequenos.
5. **QuantidadeFinita x (Cube(x), Small(x))** será verdadeira em um mundo *se e somente se* <u>**uma quantidade finita**</u> de cubos deste mundo forem pequenos.

- Note que o exemplo 4 é um quantificador numérico que pode ser tratado em FOL. No entanto, nada nos impede de definir para ele este <u>determinante na forma geral</u>.

- Note também que os primeiros dois exemplos, diferentemente dos outros, são ambíguos.
    - <u>**Poucos**</u> e <u>**Muitos**</u> são dependentes de contexto!
    - Quais as quantidades que representam <u>poucos</u> ou <u>muitos</u> variam de um contexto para outro.
    - Esta dependência contamina nossa definição das condições de verdade para sentenças como **Few x (Cube(x), Small(x))** e **Many x (Dodec(x), Large(x))**.
    - Dependendo das intenções, ou de quem profere a sentença, o que deve ser considerado <u>poucos</u> ou <u>muitos</u>, pode variar.
    - Como contornar esta ambigüidade?

- (1) Mesmo quando ocorre dependência do contexto, há certos princípios lógicos claros que podem ser descritos e explicados. Por exemplo:
    - Muitos cubos são pequenos
    - Todos os cubos pequenos estão atrás de b
    - CONCLUSÃO: Muitos cubos estão atrás de b.

- (2) O problema da dependência do contexto tem solução. É possível definir de modo matematicamente preciso os determinantes dependentes de contexto. Sendo que cada definição dependerá das intenções de quem usa o determinante.

AULA 7

LPL 14.5: Lógica da Quantificação Generalizada

- Determinantes diferentes têm significados diferentes e, portanto, propriedades lógicas diferentes.
- É possível classificar os determinantes em grupos diferentes de acordo com certas propriedades lógicas que eles possuem.

<u>CONSERVATIVIDADE</u>: se aplica a praticamente todos os determinantes do português.

  - Qx (A(x), B(x)) $\Leftrightarrow$ Qx (A(x), (A(x) $\wedge$ B(x)))

- Exemplos: (ver p. 389-390)
  - ($\leftarrow$) Se <u>nenhum</u> médico é um médico e um advogado, então <u>nenhum</u> médico é um advogado.
  - ($\rightarrow$) Se <u>poucos</u> atores são ricos, então <u>poucos</u> atores são ricos e atores.
- **Apenas** (only) tem a aparência de um determinante (mas não é) e não respeita a conservatividade.
  - É verdade que <u>apenas</u> atores são atores e ricos. Mas disso não se segue que <u>apenas</u> atores são ricos.
- **<u>Teste para saber se uma palavra é ou não um determinante</u>**:
  - Nenhum determinante pode ser adicionado a uma frase nominal completa.
  - Ex: <u>Poucos</u> *´alguns livros´* $\rightarrow$ não faz nenhum sentido.
  - <u>Apenas</u> *´alguns livros´* $\rightarrow$ faz bastante sentido!
  - <u>CONCLUSÃO</u>: apenas não é um determinante!

<u>MONOTONICIDADE</u>: aumentar ou diminuir o "tamanho" de B em Qx (A(x), B(x)).

- **<u>Monótono Crescente</u>**: Se Q(A, B) e você <u>aumenta</u> B para um conjunto maior B´, então Q(A, B´).
- Q é monótono crescente se para todo A, B e B´ o argumento seguinte é válido:
  - Qx (A(x), B(x))
  - $\forall$x (B(x) $\rightarrow$ B´(x))
  - Qx (A(x), B´(x))
- **<u>Teste para Monótono Crescente</u>**: Q é monótono crescente se e somente se o seguinte argumento é válido:

- **Q** cubo(s) é (são) pequenos e estão na mesma linha que **c**.
- **Q** cubo(s) é (são) pequenos.

- **Monótono Decrescente**: Se Q(A, B´) e você diminui B´ para um conjunto menor B, então Q(A, B).
- Q é monótono decrescente se para todo A, B´ e B o argumento seguinte é válido:
    - Qx (A(x), B´(x))
    - $\forall$x (B(x) → B´(x))
    - Qx (A(x), B(x))
- **Teste para Monótono Decrescente**: Q é monótono decrescente se e somente se o seguinte argumento é válido:
    - **Q** cubo(s) é (são) pequenos.
    - **Q** cubo(s) é (são) pequenos e estão na mesma linha que **c**.
- Ver tabela 14.1, p 391 sobre a monotonicidade de quantificadores.
- Há alguns determinantes (ver tabela) que simplesmente não são monótonos, nem crescentes nem decrescentes: (exatamente dois, todos menos um,...)

PERSISTÊNCIA: aumentar ou diminuir o "tamanho" de A em Qx (A(x), B(x)).

- **Persistência**: Se Q(A, B) e você aumenta A para um conjunto maior A´, então Q(A´, B).
- Q é persistente se para todo A, A´ e B o argumento seguinte é válido:
    - Qx (A(x), B(x))
    - $\forall$x (A(x) → A´(x))
    - Qx (A´(x), B(x))
- **Teste para a Persistência**: Q é persistente se e somente se o seguinte argumento é válido:
    - **Q** cubo(s) pequeno(s) estão à esquerda de **b**.
    - **Q** cubo(s) estão à esquerda de **b**.
- **Anti-Persistência**: Se Q(A', B) e você diminui A' para um conjunto menor A, então Q(A, B).
- Q é anti-persistente se para todo A', A e B o argumento seguinte é válido:
    - Qx (A'(x), B(x))
    - $\forall$x (A(x) → A'(x))
    - Qx (A(x), B(x))
- **Teste para a Anti-Persistência**: Q é anti-persistente se e somente se o seguinte argumento é válido:

- **Q** cubo(s) estão à esquerda de **b**.
- **Q** cubo(s) pequeno(s) estão à esquerda de **b**.

- Ver tabela 14.2, p 393 sobre a persistência e anti-persistência de quantificadores.
- Vários determinantes (ver tabela) simplesmente não são nem persistentes nem anti-persistentes: (exatamente dois, todos menos um, muitos,...)

ARGUMENTOS DO DIA A DIA

- Monotonicidade e persistência são propriedades **muitíssimo** usadas em argumentos do dia a dia.
- Seu pai quer te convencer a assumir a fazenda da família ao invés de ser ator. Veja o argumento.
  - Você quer ser rico, certo? Bem, de acordo com esta pesquisa poucos atores têm salários acima da faixa oficial de pobreza. Logo, poucos atores são ricos.
  - O argumento do seu pai depende do fato de que poucos é monótono decrescente.
- Nos argumentos do cotidiano e em linguagem natural, os determinantes são muito comuns!

AULA 8

LPL 14.6: Outras Limitações Expressivas da Lógica de Primeira Ordem

- A quantificação generalizada é uma resposta a uma limitação expressiva de FOL e, conseqüentemente, à sua inabilidade em esclarecer toda a lógica inerente às linguagens naturais (como português).
- Mas ainda há muitas outras limitações. Vejamos, a título de exemplo, apenas algumas delas.

QUANTIFICAÇÃO DE TRÊS LUGARES

- Considere as seguintes sentenças:
  - **Mais** cubos do **que** tetraedros estão na mesma linha do que **c**.
  - Há o **dobro** de cubos **que** de tetraedros na mesma coluna de **f**.
  - **Não tantos** tetraedros **quanto** dodecaedros são grandes.
- As expressões em destaque envolvem duas expressões nominais (substantivos) e uma expressão verbal para formar sentenças que comparam relações quantitativas.
- As técnicas de quantificação generalizada que vimos na seção 14.4 podem ser estendidas para permitir a formalização deste tipo de sentença.
- Para isso precisaríamos adicionar quantificadores de **tres lugares**: Qx (A(x), B(x), C(x))
  - Mais *x* (A(x), B(x), C(x)) – "Mais **A**s do que **B**s são **C**s.

PLURAIS

- As seguintes sentenças em português têm significado diferentes:
    - Os garotos discutiram com o professor
    - Cada garoto discutiu com o professor
- Na **primeira** há uma sugestão mais forte de que houve uma única discussão entre um grupo de garotos e o professor. Na **segunda** há uma sugestão mais forte de que houve várias discussões entre o professor e cada um dos garotos.
- Em FOL não há *frases nominais* (substantivos) no plural!
    - Não conseguimos distinguir uma única ação efetuada por um grupo de indivíduos de diversas ações que cada um dos indivíduos do grupo efetuou.
    - Repare que nem a conjunção nem o quantificador universal resolvem. Continua sendo cada aluno com o professor. NÃO HÁ PLURAL em FOL.

TEMPORALIDADE

- FOL assume um domínio atemporal de relações imutáveis.
- Já em português podemos explorar nossa localização no espaço e no tempo para dizer coisas sobre o presente, o passado e os locais à nossa volta.
    - Em FOL é bastante complicado dizer que está quente hoje, aqui, mas ontem estava frio.
    - Para fazer isso é preciso permitir quantificadores sobre instantes de tempo e localidades, além de enriquecer nossas proposições atômicas para tratar destes "objetos".

MODALIDADE

- Há uma rica estrutura **modal** nas linguagens naturais que nos permite não apenas dizer como as coisas são, mas também, como elas...
    - devem ser
    - poderiam ser
    - não podem ser
    - deveriam ser
    - seriam se tivéssemos feito TAL e TAL coisa
- As sentenças de FOL, por sua vez, apenas dizem como as coisas **são**.
- Em português podemos dizer coisas como abaixo. Em FOL não:
    - Joaquim poderia estar morto.
    - Manuel não deveria ter se matriculado em Tópicos de Lógica III.

EXTENSÕES DA LÓGICA CLÁSSICA

- Para todos estes casos acima, existem extensões da lógica clássica que os tratam.
- Primeiramente enriquece-se a linguagem FOL para suplantar as limitações expressivas e, em seguida, estuda-se as novas propriedades lógicas desta linguagem enriquecida.
- Assim, temos:
    - As Lógicas da Quantificação Generalizada;
    - Lógicas Temporais;
    - Lógicas Modais;
    - etc, etc, etc,...
- No entanto, é preciso salientar que, já há bastante tempo estuda-se extensões da lógica clássica e, até agora, nenhuma destas extensões tornou-se corrente (hegemonicamente aceita).

DIFERENÇA ENTRE EXTENSÕES DA LÓGICA CLÁSSICA E LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS

- É importante destacar uma diferença importante:
    - **EXTENSÕES DA LÓGICA CLÁSSICA**: uma coisa é ampliar o poder expressivo de FOL e estender a lógica clássica para estudarmos as propriedades lógicas de sentenças inefáveis em FOL.
        - Lógica da Quantificação Generalizada, Lógicas Temporais, Lógicas Modais,...
    - **LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS**: outra coisa é questionarmos alguns dos princípios básicos da lógica clássica que são expressáveis em FOL e estudarmos como seria a lógica sem alguns destes princípios. Estas lógicas não são extensões, mas reduções da lógica clássica.
        - Lógicas Intuicionistas (não admitem o terceiro excluído $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$).
        - Lógicas Paraconsistentes (não admitem a trivialização: $\mathbf{A}, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$)
        - Lógicas Quânticas (não admitem que **a = a**)
        - etc, etc, etc, ...