- O Cálculo de Seqüentes foi criado por Gerard Gentzen em 1935 como uma extensão de seus sistemas anteriores de Dedução Natural.

- O cálculo de seqüentes é considerado por muitos como o estilo de sistemas formais mais elegante e flexível.

1.2. O Cálculo de Seqüentes Proposicional

1.2.1. Seqüentes e Cedentes

- SEQÜENTE: Diferentemente dos sistemas hilbertianos e de dedução natural, cada linha de uma prova não é uma fórmula, mas um *seqüente*, que é escrito na forma:

$$\boxed{A_1, \ldots, A_k \rightarrow B_1, \ldots, B_t}$$

- SETA DE SEQÜENTE: "→" é chamado de seta de seqüente.

- FÓRMULA: Cada A_i e B_j é uma fórmula.

- SIGNIFICADO DE UM SEQÜENTE: O significado intuitivo do seqüente é que a conjunção dos A_i's implica a disjunção dos B_j's.

- Então um seqüente é equivalente em significado à fórmula:

$$\boxed{(A_i \wedge \ldots \wedge A_k) \supset (B_i \vee \ldots \vee B_k)}$$

CONVENÇÕES:

- Uma conjunção vazia (quando k=0) tem o valor TRUE.

- Uma disjunção vazia (quando t=0) tem o valor FALSE. Então:

  - "→ A" tem o mesmo significado que a fórmula A.

  - "A →" tem o mesmo significado que a fórmula ~A.

  - "→" tem o mesmo significado que que FALSE.

1 BUSS, S. R. *Handbook of Proof* Theory. Elsevier. Amasterdan: 1998

- <u>ANTEDEDENTE</u>: $A_1, ..., A_k$ é chamado ***antecedente***.
- <u>SUCEDENTE</u>: $B_1, ..., B_t$ é chamado ***sucedente***.
- <u>CEDENTE</u>: Tanto o antecedente quanto o sucedente são chamados de ***cedentes***.

1.2.2. Inferências e Provas

- <u>PK</u>: O Sistema de Cálculo de Seqüentes Proposicional PK.
- <u>PROVA</u>: arvores (ou grafos acíclicos diretos) em que os nós são seqüentes.
- <u>SEQÜENTE FINAL</u>: A raiz da árvore, o nó mais abaixo, é chamado de ***<u>seqüente-final</u>***, e é o seqüente provado pela prova.
- <u>SEQÜENTE INICIAL</u>: As folhas, no topo da árvore, são os ***<u>seqüentes-iniciais</u>***, ou axiomas.
- Usualmente os únicos seqüentes iniciais permitidos são os axiomas da forma $A \rightarrow A$. Nós, mais adiante vamos exigir que A seja atômico.
- Qualquer outro seqüente em uma prova, além dos iniciais ($A \rightarrow A$) deve ser inferido por uma das seguintes regras de inferência descritas abaixo.
- <u>FORMA DAS REGRAS DE INFERÊNCIA</u>: As regras tem uma destas duas formas:

$$\frac{S_1}{S} \qquad\qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S}$$

- Indicando que um seqüente S pode ser inferido de S_1 ou de S_1 e S_2.
- <u>SEQÚENTE INFERIOR</u>: a conclusão S é chamada se ***<u>seqüente inferior</u>*** da inferência.
- <u>SEQÜENTE SUPERIOR</u>: cada hipótese (S_1 e S_2) é chamada de ***<u>seqüente superior</u>*** da inferência.
- A lista seguinte indica os esquemas das regras válidas do sistema PK, onde A e B denotam formulas arbitrárias e $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ denotam cedentes arbitrários.

REGRAS ESTRUTURAIS FRACAS

troca: à esq.	$\dfrac{\Gamma, A, B, \Pi, \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi, \rightarrow \Delta}$	troca: à dir.	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Lambda}$
contração: à esq.	$\dfrac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	contração: à dir.	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}$
enfraquecimento: à esq.	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	enfraquecimento: à dir.	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}$

- <u>REGRAS FRACAS</u>: as regras estruturais fracas também são chamadas apenas de <u>***regras fracas***</u>.
- <u>REGRAS FORTES</u>: as outras regras de inferência são chamadas de regras fortes.
- <u>REGRAS ESTRUTURAIS</u>: as regras de inferência estruturais consistem das regras estruturais fracas mais a regra do corte.

REGRA DO CORTE

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

REGRAS PROPOSICIONAIS

$\sim$esq	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\sim A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\sim$dir	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \sim A}$
$\wedge$esq	$\dfrac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\wedge$dir	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \wedge B}$
$\vee$esq	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\vee$dir	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B}$
$\supset$esq	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\supset$dir	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B}$

- Na literatura, as regras $\vee$dir e $\wedge$esq costumam ser definidas respectivamente como:

$$\vee\text{dir} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, B \vee A}$$

$$\wedge\text{esq} \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \text{e} \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{B \wedge A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

- A alteração proposta por Buss não modifica o poder dedutivo do sistema PK e tem motivação apenas na diminuição do número total de regras em certas facilidades que esta alteração provoca nos limitantes superiores para o tamanho das provas livres de corte.

- Com isto o sistema PK está completamente determinado!!

- <u>PK-PROVA</u>: escrevemos PK $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ para denotar que o seqüente $\Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma prova no sistema.
  - Quando A é uma fórmula, escrevemos PK $\vdash$ A para denotar que PK $\vdash \rightarrow$ A.

- <u>FUNÇÃO DA REGRA DO CORTE</u>: A regra do corte tem um papel especial no cálculo de seqüentes. Provaremos que PK é um sistema completo mesmo sem a regra do corte. No entanto, seu uso pode reduzir significativamente o tamanho das provas.

- <u>PROVA LIVRE DE CORTE (cut-free)</u>:Uma prova é dita cut-free (livre de corte) se não contém nenhuma inferência dada pela regra do corte.
  - *** FAZER EXEMPLOS DE PROVAS ***

1.2.3. Ancestrais, Descendentes e Propriedade da Subfórmula

- <u>FÓRMULA PRINCIPAL</u>: todas as regras de inferência, com exceção do corte, têm uma ***<u>fórmula principal</u>***, que é a fórmula que ocorre no seqüente inferior que não está nos cedentes Γ ou Δ (ou Π ou Λ).
  - As regras de troca têm duas fórmulas principais.

- <u>FÓRMULA AUXILIAR</u>: toda inferência, exceto o enfraquecimento, tem uma ***<u>fórmula auxiliar</u>***, que são as fórmulas A e B que ocorrem no(s) seqüente(s) superiore(s) da inferência.

- <u>FÓRMULAS LATERAIS</u>: as fórmulas que ocorrem nos dedentes Γ, Δ, Π ou Λ são chamadas ***<u>fórmulas laterais</u>***.

- <u>FÓRMULAS DO CORTE</u>: as duas fórmulas auxiliares da regra do corte são chamadas de ***<u>fórmulas do corte</u>***.

- <u>DESCENDENTE IMEDIATO</u>:

    1. Se <u>C é uma fórmula lateral</u> em um seqüente superior de uma inferência, digamos, a i-ésima fórmula do cedente Γ, Δ, Π ou Λ, então o único descendente imediato de C é <u>a</u> ocorrência correspondente da mesma fórmula, na mesma posição do mesmo cedente no seqüente inferior da inferência.

    2. Se <u>C é uma fórmula auxiliar</u> de qualquer inferência, exceto de uma troca ou corte, então a fórmula principal da inferência é o descendente imediato de C.

    3. Para as <u>regras da troca</u>, o descendente imediato de A ou B do seqüente superior é o A ou B respectivo do seqüente inferior.

    4. As <u>fórmulas do corte</u> em uma inferência pela regra do corte não têm descendente imediato.

- <u>ANCESTRAL IMEDIATO</u>: C é um ancestral imediato de D se e somente se D é um descendente imediato de C

    - Note que as únicas fórmulas em uma prova que não têm ancestral imediato são as fórmulas dos seqüentes iniciais e as fórmulas principais de inferências por enfraquecimento.

- <u>ANCESTRAL</u>: a relação <u>ancestral</u> é o fecho transitivo e reflexivo da relação <u>ancestral imediato</u>.

    - Então C é <u>***ancestral***</u> de D se e somente se há uma cadeia de zero ou mais ancestrais imediatos de D até C.

- <u>ANCESTRAL DIRETO</u>: C é um <u>***ancestral direto***</u> de D, se C é ancestral de D e C é a mesma fórmula que D.

- <u>DESCENDENTE e DESCENDENTE DIRETO</u>: o converso similar às definições de ancestral e ancestral direto.

- <u>OBSERVAÇÃO - SUBFÓRMULA</u>: se C é ancestral de D, então C é subfórmula de D.

1.2.4. Proposição - Propriedade da Subfórmula
Se P é uma prova no sistema PK livre de corte, então toda fórmula que ocorre em P é uma subfórmula de uma fórmula que ocorre no seqüente final de P.

1.2.5. Tamanho das Provas

- Há um número variado de modos de medir o tamanho de uma prova P em cálculo de seqüentes. Usaremos o seguinte método:

- ‖P‖ denotará o número de inferências fortes em uma prova P.

- Note que se P tem n seqüentes, então $\|P\| < n$.

1.2.6. Teorema da Correção

O Cálculo de Seqüentes Proposicional PK é correto. Ou seja, todo seqüente ou fórmula provável-em-PK é uma tautologia.

- **PROVA**: basta notar que as regras de inferência de PK preservam a tautologicidade dos seqüentes, e que os seqüentes iniciais são tautologias.

- A forma mais geral (implicacional) da correção também vale:

  - Se $\mathfrak{I}$ é um conjunto de seqüentes , seja uma $\mathfrak{I}$-prova qualquer prova na qual seqüentes de $\mathfrak{I}$ são aceitos como seqüentes iniciais. Então, Se $\Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma $\mathfrak{I}$-prova, então $\Gamma \rightarrow \Delta$ é verdadeiro em qualquer atribuição de verdade que satisfaz $\mathfrak{I}$.

1.2.7. Teorema da Inversão

Seja I uma inferência proposicional, ou do corte ou de troca ou contração (só o enfraquecimento foi excluído). Se o seqüente inferior de I é válido, então todos os seqüentes superiores de I também são.

- Da mesma forma, se o seqüente inferior de I é válido segundo uma atribuição de valores de verdade τ, então todos os seqüentes superiores de I também são.

  - **PROVA**: simples por inspeção em todas as regras referidas no enunciado.

  - Repare que a inversão pode falhar em uma inferência por enfraquecimento. Por que? Exemplo?

1.2.8. Teorema da Completude

Se $\Gamma \rightarrow \Delta$ é uma tautologia, então tem uma PK-prova sem corte.

- O teorema da completude estabelece que todo seqüente válido (tautologia) pode ser provado no cálculo de seqüentes proposicional PK.

- Este resultado, junto com a correção, mostra que os seqüentes PK-prováveis são exatamente os seqüentes proposicionalmente válidos.

1.2.9. Lema Auxiliar

Se $\Gamma \rightarrow \Delta$ é um seqüente válido no qual há m ocorrências de conectivos lógicos, então há uma PK-prova, sem corte, de $\Gamma \rightarrow \Delta$ com menos de 2^m inferências fortes.

- Usaremos este lema mais forte que a completude, como passo para a demosntração de 1.2.8.

- **PROVA**: indução em m

- BASE: m=0.
  - Neste caso $\Gamma \rightarrow \Delta$ não tem constante lógica e, portanto, todas as fórmulas do seqüente são variáveis proposicionais.
  - Como o seqüente é válido, tem que haver uma variável proposicional p que ocorre tanto em Γ como em Δ.
  - Então $\Gamma \rightarrow \Delta$ pode ser provado com zero inferências fortes a partir do seqüente inicial $p \rightarrow p$ por regras de enfraquecimento.
- PASSO: m>0
  - HI (hipótese de Indução): se $\Pi \rightarrow \Lambda$ tem $n < m$ ocorrências de conectivos lógicos, então há uma PK-prova sem corte de $\Pi \rightarrow \Lambda$ com menos de 2^n inferências fortes.
  - Provaremos o passo indutivo por casos, de acordo com as possibilidades para os conectivos principais das fórmulas de Γ e Δ.
  - CASO 1.1: há uma fórmula da forma ~A em Γ.
    - Seja Γ' o cedente obtido removendo-se de Γ todas as ocorrências de ~A.
    - Podemos inferir $\Gamma \rightarrow \Delta$ por:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \rightarrow \Delta, A}{\sim A, \Gamma' \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

    - onde a linha dupla indica uma série de inferências fracas.
    - Como, por hipótese do lema, $\Gamma \rightarrow \Delta$ é válido, então é claro que ~A, $\Gamma' \rightarrow \Delta$ também é válido, pois nenhuma fórmula foi acrescentada ou subtraída do seqüente. Mudou-se, possivelmente, apenas a quantidade e a posição das fórmulas de Γ.
    - Então, como ~A, $\Gamma' \rightarrow \Delta$ é válido, pelo teorema da inversão, $\Gamma' \rightarrow \Delta, A$ também é válido.
    - Mas note que pelo menos uma das constantes lógicas que ocorria em $\Gamma \rightarrow \Delta$ não ocorre mais em $\Gamma' \rightarrow \Delta, A$ (o "~" do ~A de Γ).
    - Logo, $\Gamma' \rightarrow \Delta, A$ tem no máximo m-1 conectivos lógicos.
    - Logo, a hipótese de indução (HI) vale para $\Gamma' \rightarrow \Delta$, A. Portanto, há uma prova livre de corte com menos de 2^{m-1} inferências fortes.
    - Isso dá uma prova livre de corte de $\Gamma \rightarrow \Delta$ com menos de $2^{m-1} + 1 \leq 2^m$ inferências fortes.
  - CASO 1.2: há uma fórmula da forma ~A em Δ.

- resolve-se de modo exatamente análogo ao caso anterior.

- DEMAIS CASOS: os demais casos, com outros conectivos em Γ e Δ, também são bastante similares a este. O único ponto digno de nota ocorre quando há dois seqüentes superiores, como no caso em que Δ tem uma fórmula da forma $A \wedge B$. Neste caso, fazendo Δ' o sucedente Δ menos todas as ocorrências de $A \wedge B$, podemos inferir:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta', A \qquad \Gamma \rightarrow \Delta', B}{\Gamma \rightarrow \Delta', A \wedge B}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

  - Aqui, pelo teorema de inversão e hipótese de indução, teremos duas provas com menos de 2^{m-1} regras de inferência. Uma de $\Gamma \rightarrow \Delta', A$ e uma de $\Gamma \rightarrow \Delta', B$. Juntando estas duas provas conforme esquema acima, temos uma prova com menos de 2^m regras de inferência: ($a < 2^{m-1}$, $b < 2^{m-1}$ e $c = a+b+1 \rightarrow c < 2^m$)

1.2.10. Melhorando o Limite Superior

- SUBFÓRMULA OCORRENDO POSITIVAMENTE / NEGATIVAMENTE:

- NEGATIVAMENTE LIGADO:dada uma fórmula A, uma ocorrência de uma subfórmula B de A e a ocorrência de um conectivo lógico α em A, dizemos que B é ***negativamente ligado*** por α se
  1. α é "$\sim$" e B está em seu escopo, ou
  2. α é "$\supset$" e B é uma subfórmula de seu antecedente.

- OCORRE NEGATIVAMENTE: B é dito ***ocorrer negativamente*** [***positivamente***] em A se B é negativamente ligado por um número impar [par] de conectivos em A.

- OCORRE NEGATIVAMENTE: Uma subfórmula que ocorre em um seqüente $\Gamma \rightarrow \Delta$ é dita ***ocorrer positivamente*** em $\Gamma \rightarrow \Delta$ se ocorre positivamente em Δ ou negativamente em Γ. Caso contrário, é dita ***ocorrer negativamente*** no seqüente.

Lema:

Seja $\Gamma \rightarrow \Delta$ um seqüente válido. Seja m' o número de subfórmulas distintas que ocorrem positivamente no seqüente e m'' o número de subfórmulas distintas que ocorrem negativamente no seqüente.. Seja $m = m' + m''$. Então há uma PK-prova livre de corte com menos de 2^m inferências fortes.

- Por que você acha que ele precisou definir ocorrência forte e fraca para enunciar este lema? não bastaria tomar o número de subfórmulas distintas?

- m, como definido no lema acima, é maior ou menor do que o número de subfórmulas distintas de $\Gamma \rightarrow \Delta$?

1.2.11. Eliminação do Corte

- O famoso teorema da eliminação do corte estabelece que se um seqüente tem uma PK-prova, então ele tem uma prova livre de corte.

- Isto é uma conseqüencia imediata dos teoremas da correção e completude. Veja como.

    - Seja P uma PK-prova do seqüente $\Gamma \rightarrow \Delta$.

    - Pelo teorema da correção, se há uma PK-prova de $\Gamma \rightarrow \Delta$, então este é um seqüente válido.

    - Assim, se $\Gamma \rightarrow \Delta$ é um seqüente válido, então pelo teorema da completude há uma prova P' livre de corte para o seqüente $\Gamma \rightarrow \Delta$.

- Este é um modo superficialmente elegante de provar a eliminação do corte, que no entanto tem a desvantagem de não nos informar absolutamente nada sobre como transformar construtivamente uma PK-prova qualquer em uma prova livre de corte.

- Esta é uma prova semântica, e para este resultado (eliminação do corte), uma prova sintática teria muito mais informação e utilidade.

- Veremos, mais adiante, um procedimento passo-a-passo para converter provas do cálculo de seqüentes de primeira ordem em provas livres de corte. Este mesmo método funciona para o cálculo proposicional.

- TEOREMA DA ELIMINAÇÃO DO CORTE: suponha que P é uma PK-prova de $\Gamma \rightarrow \Delta$. Então $\Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma PK-prova livre de corte com um número de inferências menor ou igual a $2^{\|P\|}$ inferências fortes.

1.2.12. Eliminação dos Cortes-Livres

- Seja $\Im$ um conjunto de seqüentes e, como antes, uma $\Im$-prova uma prova do cálculo de seqüentes que pode conter seqüentes de $\Im$ como seqüentes iniciais, além dos seqüentes iniciais lógicos (axiomas).

- Se I é uma inferência do corte que ocorre em uma $\Im$-prova P, então dizemos que as fórmulas do corte de I são ***descendentes diretas de*** $\Im$ se elas têm pelo menos um ancestral direto que ocorre como uma fórmula em um seqüente inicial de P que pertence a $\Im$.

- **CORTE LIVRE**: um corte I é dito ***livre*** se nenhuma das fórmulas auxiliares de I descende diretamente de $\Im$.

- **PROVA LIVRE DE CORTES LIVRES**: uma prova é livre de cortes-livres se e somente se ela não contém cortes livres.

- O teorema da eliminação do corte pode ser generalizado de modo a demonstrar que o fragmento livre de cortes livres do cálculo de seqüentes é implicacionalmente completo. Ou seja:

- **ELIMINAÇÃO DO CORTE-LIVRE**: Seja S um seqüente e $\Im$ um conjunto de seqüentes. Se $\Im \models S$, então há uma $\Im$-prova livre de cortes livres de S.

1.2.13. Alguns Comentários

- Uma das grandes vantagens do cálculo de seqüentes é sua flexibilidade para ser adaptado para lógicas não-clássicas.

- Por exemplo, a lógica proposicional intuicionista pode ser formalizada em um sistema PJ que é definido exatamente como PK, com exceção de que os sucedentes dos seqüentes inferiores das regras fortes são restritos a conter no máximo uma fórmula.

- A lógica minimal também é formalizada como PJ, com a restrição mais forte de que todos os sucedentes contenham exatamente uma fórmula.

- Lógica linear, lógicas relevantes, lógicas modais e outras podem também ser formuladas elegantemente em cálculo de seqüentes.

2. Teoria da Prova da Lógica de Primeira Ordem

2.1. Sintaxe e Semântica

2.1.1. Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

- A lógica de primeira ordem é uma extensão da lógica proposicional que permite o raciocínio sobre indivíduos, que utiliza funções e predicados atuando sobre estes indivíduos.
- A linguagem proposicional é acrescida dos seguintes símbolos:
  - **conectivos proposicionais**: $\sim$, $\wedge$, $\vee$ e $\supset$.
  - **quantificadores**: $(\exists x)$ – "existem x" e $(\forall x)$ – "para todo x"
  - **variáveis**: utilizaremos $x, y, z, \ldots,$ e $a, b, c, \ldots,$ como metasímbolos para variáveis. Há um conjunto infinito enumerável de variáveis.
  - **símbolos de função**: de aridades especificadas, denotados por: $f, g, h, \ldots$
  - **constantes**: símbolos de função de aridade zero.
  - **símbolos de relação**: de aridades especificadas, denotados por $P, Q, R, \ldots$
  - Algumas vezes, as linguagens de primeira ordem incluem um símbolo distinguido de relação de aridade 2 "=" para a identidade.
- Definição usual de termos e fórmulas (p.26), de variáveis livres e ligadas (p.27)
- Se t é um termo, $A(t/x)$ denota a fórmula obtida pela substituição de toda ocorrência de x livre em A pelo termo t.
  - Para evitar efeitos indesejados nesta operação, geralmente queremos que t seja *livre para substituição por x em A*, que significa que nenhuma variável livre de t se torna ligada em $A(t/x)$.
  - Formalmente, isso significa que nenhuma ocorrência livre de x em A ocorre no escopo de um quantificador (Qy) com y sendo uma variável que ocorre em t.
- A substituição simultânea de $x_1, \ldots, x_k$ por $t_1, \ldots, t_k$ em A, denotada por $A(t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k)$ é definida similarmente da maneira óbvia.
- Para simplificar a notação, adotamos algumas convenções para denotar substituições:

- Quando escrevemos $A(x)$ e $A(t)$ no mesmo contexto, isso indicará que $A(x)$ é uma fórmula e que $A(t)$ é $A(x/t)$.

- Recomendo a leitura do item 2.1.2 Semântica da Lógica de primeira ordem para uma rápida, porém precisa revisão das definições de *estrutura*, *modelo*, *satisfação*, *interpretação*, *atribuição de objetos*, *verdade*,...

2.3. O Cálculo de Seqüentes de Primeira Ordem

- Vamos agora ampliar o cálculo de seqüentes proposicional apresentado na seção 1.2.

2.3.1. Variáveis Livres e Ligadas

- Aqui, algumas restrições com relação a variáveis livres e ligadas e a definição de fórmulas e termos são feitas. São semelhantes àquelas que vimos em Dedução Natural.
- As variáveis livres serão denotadas pelos metasímbolos de variáveis *a*, *b*, *c*,... e as variáveis ligadas pelos metasímbolos de variáveis *x*, *y*, *z*, ...
- Os ***termos***, são definidos apenas com variáveis livres e funções. Quando variáveis ligadas estão presentes em um termo, o chamamos de ***semitermo***.
- Da mesma fórmula, uma ***semifórmula*** é como uma fórmula, com exceção de que admite variáveis ligadas onde deveria haver variáveis livres.
- Usaremos *r*, *s*, *t*,... como metavariáveis para termos e A, B, C,... como metavariáveis para fórmulas.
- Note que, em geral, uma subfórmula de uma fórmula será uma semifórmula.

2.3.2. Definição LK

- O cálculo de seqüentes de primeira ordem LK é definico como uma extensão do sistema proposicional PK. LK tem todas as regras de inferência de PK mais as seguintes:

REGRAS QUANTIFICACIONAIS

$\forall$esq	$\dfrac{A(t),\ \Gamma \rightarrow \Delta}{(\forall x)A(x),\ \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\forall$dir	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(b)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\forall x)A(x)}$
$\exists$esq	$\dfrac{A(b), \Gamma \rightarrow \Delta}{(\exists x)A(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\exists$dir	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\exists x)A(x)}$

- Onde: A é uma fórmula arbitrária, *t* um termo arbitrário e a variável livre *b*, chamada de "*eigenvariável*" da inferência e ***não deve ocorrer*** em Γ e Δ.
- As regras proposicionais e quantificacionais são chamadas de ***regras lógicas***.
- As noções de descendente, ancestral e noções derivadas, bem como as medidas de tamanho das provas são idênticas às apresentadas no cálculo proposicional.
- Seja S o seqüente $\Gamma \rightarrow \Delta$. Chamaremos de A_S à fórmula $(\wedge\Gamma) \supset (\vee\Delta)$, que representa o "significado" pretendido para o seqüente S.

- Seja $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_k)$ as variáveis livres de A_S. Então $A_S = A_S(\boldsymbol{b})$.
- $\forall S$ denota o fecho universal $(\forall \boldsymbol{x})A_S(\boldsymbol{x})$ da fórmula A_S.

2.3.3. Expansões de LK via Seqüentes Iniciais

- Os únicos seqüentes iniciais permitidos em LK são do tipo $A \to A$ quando A é atômica.
- No entanto, algumas vezes é conveniente permitir outros tipos de seqüentes iniciais. Então, se $\mathfrak{I}$ é um conjunto de seqüentes, definimos LK$\mathfrak{I}$ como o sistema obtido de LK, mas que também permite que qualquer elemento de $\mathfrak{I}$ seja seqüente inicial.
- Um exemplo importante desta possibilidade é a teoria LK*e* para a lógica de primeira ordem com identidade.
- LK*e* é LK com a adição dos seguintes seqüentes iniciais para a identidade:

$$\to e = e$$

$$s_1 = t_1, ..., s_k = t_k \to f(\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{t})$$

$$s_1 = t_1, ..., s_k = t_k, P(\boldsymbol{s}) \to P(\boldsymbol{t})$$

- Dizemos que um conjunto $\mathfrak{I}$ é ***fechado para substituição*** se, sempre que $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ está em $\mathfrak{I}$ e t é um termo, então $\Gamma(t) \to \Delta(t)$ também está em $\mathfrak{I}$.

2.3.4. Substituição em Provas

- Quando P é uma prova escrevemos $P(a)$ e $P(t)$ para indicar que $P(t)$ é o resultado de substituir toda ocorrência de a em fórmulas de P por t.
- **TEOREMA**: Seja $\mathfrak{I}$ um conjuno de seqüentes fechado para substituição. Se $P(b)$ é uma LK$\mathfrak{I}$-prova, e se nem b nem qualquer variável em t é usada como uma eigenvariavel em $P(b)$, então $P(t)$ é uma LK$\mathfrak{I}$-prova válida.

2.3.5. Definição – Forma Normal para Variáveis Livres

- Uma variável livre no seqüente final de uma prova é chamada de um ***parâmetro variável*** da prova.
- Uma prova P está na ***forma normal para variáveis livres*** se:
    1. Nenhum parâmetro variável é usado como eigenvariável.
    2. Todas as outras variáveis livres em P (que não são parâmetro variável) são usadas exatamente uma vez como eigenvariáveis e aparecem em P apenas em seqüentes acima da inferência das quais são eigenvariáveis.
- **OBSERVAÇÃO**: Note que todas as provas podem ser colocadas na forma normal para variáveis livres através de uma simples renomeação de suas variáveis.

2.3.6. Teorema da Correção

Seja $\Gamma \to \Delta$ um seqüente arbitrário.

1. Se $\Gamma \to \Delta$ tem uma LK-prova, então $\Gamma \to \Delta$ é válido.
2. Se $\mathfrak{I}$ é um conjunto de seqüentes e $\Gamma \to \Delta$ tem uma LK$\mathfrak{I}$-prova, então $\mathfrak{I} \models \Gamma \to \Delta$.

- PROVA: o teorema da correção é provado de modo direto por inspeção nas regras e indução no número de inferências de uma prova.

2.3.7. Completude do Fragmento Livre de Corte de LK

Seja $\Gamma \rightarrow \Delta$ um seqüente de uma linguagem de primeira ordem L que não contém identidade.

1. Se $\Gamma \rightarrow \Delta$ é válido, então ele tem uma LK-prova livre de corte.
2. Seja Π um conjunto de sentenças. Se Π implica logicamente $\Gamma \rightarrow \Delta$, então há $C_1, \ldots, C_k \in \Pi$ tais que $C_1, \ldots, C_k, \Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma LK-prova livre de corte.

Corolário – Completude Generalizada. Seja $\mathfrak{I}$ um conjunto de seqüentes. Se $\mathfrak{I}$ implica logicamente $\Gamma \rightarrow \Delta$, então $\Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma LK$\mathfrak{I}$-prova.

- Note que no corolário, a LK$\mathfrak{I}$-prova pode não ser livre de corte.
- Um caso especial importante deste corolário é que LK*e* é completo.
- Apesar de, no caso mais geral, o fragmento livre de corte de LK$\mathfrak{I}$ poder não ser completo, mostraremos mais adiante que é sempre possível obter LK$\mathfrak{I}$-provas que não contenham cortes livres.
- O corolário também é conseqüência imediata do teorema da completude para o fragmento livre de corte de LK. Veja:
  - Se $\mathfrak{I} \models \Gamma \rightarrow \Delta$, então a parte (2) do teorema implica que há $S_1, \ldots, S_k$ pertencentes a $\mathfrak{I}$ tais que $\forall S_1, \ldots, \forall S_k, \Gamma \rightarrow \Delta$ tem uma LK-prova.
  - Mas, claramente, cada $\rightarrow \forall S_i$ tem uma LK$\mathfrak{I}$-prova, então com *k* inferências do corte, $\Gamma \rightarrow \Delta$ também tem uma LK$\mathfrak{I}$-prova.

PROVA DO TEOREMA DA COMPLETUDE:

- A prova deste teorema apresentada por Buss (pp 34-36) é uma extensão da prova de completude do fragmento livre de corte proposicional que apresentamos anteriormente.
- Não vamos estudá-la em detalhes. Isso porque ela tem algumas desvantagens do ponto de vista da teoria da prova:
  - ela só funciona para o sistema LK puro. Não funciona para os fragmentos (livres de cortes-livres) de sistemas do tipo LK$\mathfrak{I}$ (repare que o corolário da completude generalizada acima depende da regra do corte para ser expandido para LK$\mathfrak{I}$!)
  - a prova é completamente não-construtiva.
  - a prova não indica uma cota para o tamanho das provas livres de corte.

2.4. Eliminação do Corte

2.4.1. Definição – Altura (depth)

A altura (depth) de uma fórmula A, $dp(A)$, é definida como a altura de sua árvore de representação. Formalmente:

- $dp(A) = 0$, para A atômica;

- $dp(A \wedge B) = dp(A \vee B) = dp(A \supset B) = 1 + max\{dp(A), dp(B)\}$;
- $dp(\sim A) = dp((\exists x)A) = dp((\forall x)A) = 1 + dp(A)$.

A altura (*depth*) de uma inferência do corte é definida como sendo igual à altura de sua fórmula do corte.

DEFINIÇÃO: a função superexponencial 2_i^x, para i, $x > 0$, é definida indutivamente por:

- $2_0^x = x$;
- $2_{i+1}^x = 2^{2_i^x}$.

Então, 2_i^x representa o resultado de 2 elevado a 2 elevado a 2 ... (i vezes) elevado a x.

2.4.2. Teorema da Eliminação do Corte

Seja P uma LK-prova e suponha que toda fórmula do corte em P tem altura menor ou igual a d. Então há uma LK-prova livre de corte, P*, com o mesmo seqüente final que P, cujo tamanho é: $\|P^*\| < 2_{(2d+2)}^{\|P\|}$.

2.4.2.1. Lema

Seja P uma LK-prova cuja inferência final é um corte de altura d tal que todas os outros cortes em P têm altura estritamente menor que d. Então há uma LK-prova P* com o mesmo seqüente final que P em que todos os cortes de P* têm altura menor que d e $\|P^*\| < \|P\|^2$.

<u>**PROVA:**</u>

- A prova P termina com uma inferência do corte:

$$P \equiv \quad \dfrac{\overset{[Q]}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \qquad \overset{[R]}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

na qual a altura da fórmula do corte A é igual a d e onde todos os cortes nas subprovas Q e R têm altura estritamente menor do que d.

- O lema será provado por casos. Tantos casos quantas são as possibilidades para o conectivo principal de A.
- (I) Podemos assumir, sem perda de generalidade, que tanto Q quanto R contém pelo menos uma inferência forte, pois caso não tenham podemos facilmente eliminar a inferência do corte expressa e provar o lema. Vejamos:
  - Se não há regra de inferência forte em Q, então (1) ou $A \in \Gamma$ ou (2) existe B tal que $B \in \Delta$ e $B \in \Gamma$.
  - No caso (2) é obvio que há uma prova sem corte de $\Gamma \rightarrow \Delta$, cujo seqüente inicial é $B \rightarrow B$ apenas com regras de enfraquecimento. Se isto ocorre, o lema, para este caso, está provado.
  - No caso (1), como $A \in \Gamma$, então podemos substituir a prova P acima pela seguinte prova que também satisfaz o lema:

$$P^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}[R]\\ A, \Gamma \rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow \Delta} \text{ (enfraq. esq.)}$$

- Se não há regra de inferência forte em R o caso é absolutamente análogo!

- Também assumiremos, sem perda de generalidade, que a prova P está na forma normal para variáveis livres.

<u>**CASO (a)**</u>: A é ~B.

- Então P tem a seguinte forma:

$$P \equiv \dfrac{\begin{matrix}[Q]\\ \Gamma \rightarrow \Delta, \sim B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[R]\\ \sim B, \Gamma \rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- A estratégia da prova é construir novas provas Q^* e R^* para os seqüentes $\Gamma \rightarrow \Delta, B$ e $B, \Gamma \rightarrow \Delta$ respectivamente, que podem ser combinadas em uma prova P^* de $\Gamma \rightarrow \Delta$ através de uma inferência do corte de altura *d*-1 da seguinte forma:

$$P^* \equiv \dfrac{\begin{matrix}[R^*]\\ \Gamma \rightarrow \Delta, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[Q^*]\\ B, \Gamma \rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- Para obter Q^*, primeiramente obtemos Q' através da substituição de todo seqüente $\Pi \rightarrow \Lambda$ de Q pelo seqüente $\Pi, B \rightarrow \Lambda$-, onde Λ- é obtido de Λ removendo-se todos os ancestrais diretos da fórmula do corte ~B.
  - Q' claramente não é uma prova válida. Por exemplo, uma inferência de (~dir) em Q da forma:

$$\dfrac{B, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Pi \rightarrow \Lambda, \sim B}$$

  - Em Q' esta inferência ficaria:

$$\dfrac{B, \Pi, B \rightarrow \Lambda\text{-}}{\Pi, B \rightarrow \Lambda\text{-}}$$

  - Estritamente falando, esta não é uma inferência válida. Mas é claro que pode se tornar uma inferência válida, se inserirmos algumas *trocas* e *contrações*.
  - Analogamente, um seqüente inicial de Q' será da forma $B, C \rightarrow C$.
    - Este não é um seqüente válido, no entanto $B, C \rightarrow C$ pode ser obtido do seqüente inicial $C \rightarrow C$ através de uma inferência de enfraquecimento.
    - Note também que como a fórmula do corte deste caso, ~B, não é atômica, não há em Q seqüente inicial com a forma $\sim B \rightarrow \sim B$.
  - De modo análogo, todas as inferências em Q' podem ser corrigidas para se tornarem válidas.

- Então, Q^* é obtida de Q' através exatamente destas operações que "consertam" Q', transformando-a em uma prova válida. A inferência do exemplo ficaria, em Q^*, assim:

$$\frac{B, \Pi, B \rightarrow \Lambda\text{-}}{\Pi, B \rightarrow \Lambda\text{-}}$$

- **<u>Exercício:</u>** mostre que todas as inferências em Q' podem ser corrigidas e tornarem-se inferências válidas de Q^*.

- A prova R^* de $\Gamma \rightarrow \Delta, B$ pode ser obtida de modo similar a partir de R em 2 passos:
  1. Obtenção de R' a partir de R através da substituição de todo seqüente $\Pi \rightarrow \Lambda$ de R pelo seqüente $\Pi\text{-} \rightarrow \Lambda, B$ onde $\Pi\text{-}$ é obtido de Π removendo-se todos os ancestrais diretos da fórmula do corte $\sim B$.
  2. Obtenção de R^* a partir de R' através do "conserto" de todas as inferências não válidas e seqüentes iniciais não admitidos.
- Repare que nenhum corte novo está sendo introduzido neste processo.
- Além disso, como as inferências fracas não contam para o tamanho das provas, $\|Q^*\| \leq \|Q\|$ e $\|R^*\| \leq \|R\|$.
- Então, P^* tem apenas cortes de altura menor que d e $\|P^*\| \leq \|P\|$.

<u>CASO (b)</u>: A é $B \vee C$.

- Então P tem a seguinte forma:

$$P \equiv \quad \frac{\overset{[Q]}{\Gamma \rightarrow \Delta, B \vee C} \qquad \overset{[R]}{B \vee C, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- A estratégia é análoga à do caso anterior. Q' é uma prova cujo seqüente final é $\Gamma \rightarrow \Delta, B, C$ e que é obtida de Q através da substituição de todo seqüente $\Pi \rightarrow \Lambda$ de Q por $\Pi \rightarrow \Lambda\text{-}, B, C$, onde $\Lambda\text{-}$ é obtido de Λ pela retirada de todas as ocorrências que são ancestrais diretos da fórmula do corte $B \vee C$.
- De modo análogo ao caso anterior, através da substituição de algumas regras ($\vee$dir) em Q' por inferências fracas de troca e enfraquecimento, transformamos Q' em uma prova válida Q^*.
- Agora construímos R_B a partir de R substituindo toda ocorrência de $B \vee C$ em R, que é ancestral direto da fórmula do corte ($B \vee C$), pela fórmula B.
- Um caso que ilustra que R_B pode não ser uma prova válida é uma inferência ($\vee$esq) em R:

$$\frac{B, \Pi \rightarrow \Lambda \qquad C, \Pi \rightarrow \Lambda}{B \vee C, \Pi \rightarrow \Lambda}$$

  - Em R_B esta inferência ficaria:

$$\frac{B, \Pi \rightarrow \Lambda \qquad C, \Pi \rightarrow \Lambda}{B, \Pi \rightarrow \Lambda}$$

- Em sentido estrito, esta não é uma inferência válida. Mas R_B pode ser "consertada", descartando-se a inferência e sua hipótese superior direita, junto com a subprova que a obtém.
- Simples adições de inferências fracas resolvem todos os outros possíveis problemas de R_B. Então podemos obter uma prova R_B válida de $B, \Gamma \rightarrow \Delta$.
- Um processo similar nos dá uma inferência R_C de $C, \Gamma \rightarrow \Delta$.

- A prova P^* pode agora ser definida como:

$$P^* \equiv \cfrac{\cfrac{\overset{[Q^*]}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, C} \qquad \overset{[R_C]}{C, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta, B} \qquad \overset{[R_B]}{B, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- O processo de obtenção de Q^*, R_B e R_C não introduz nenhum corte novo ou inferência forte nova.
- Então, claramente, pelas hipóteses do lema, todos os cortes em P^* tem altura $< d$.
- Além disso, $\|P^*\| \leq \|Q\| + 2\|R\| + 2$. Como $\|P\| = \|Q\| + \|R\| + 1$ e $\|Q\|, \|R\| \geq 1$, isto é suficiente para provar o lema para este caso.
  - Pois $\|P^*\| \leq \|Q\| + 2\|R\| + 2 \leq (\|Q\| + \|R\| + 1)^2 = \|P\|^2$.

CASOS (c) e (d): (A é $B \land C$) e (A é $B \supset C$).

- Estes casos são bastante análogos ao caso (b) e serão omitidos.

CASO (e): A é $(\exists x)B(x)$.

- Então P tem a seguinte forma:

$$P \equiv \cfrac{\overset{[Q]}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\exists x)B(x)} \qquad \overset{[R]}{(\exists x)B(x), \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- Primeiro consideremos como a fórmula $(\exists x)B(x)$ pode ter sido introduzida na subprova Q.
  - Como ela não é atômica, não foi em um seqüente inicial.
  - Então ou foi por uma inferência de enfraquecimento ou de ($\exists$dir).
  - Suponha que haja $k \geq 0$ ($\exists$dir) inferências em Q cuja fórmula principal é um ancestral direto da fórmula do corte $(\exists x)B(x)$. Isto pode ser enumerado como:

$$\frac{\Pi_i \rightarrow \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i \rightarrow \Lambda_i, (\exists x)B(x)}$$

- onde $1 \leq i \leq k$.
- Similarmente, localizamos todas as inferências ($\exists$esq) em R cuja fórmula principal é ancestral direto da fórmula do corte $(\exists x)B(x)$ e as enumeramos como:

$$\frac{B(a_j)\ \Pi'_j \to \Lambda'_j}{(\exists x)B(x), \Pi'_j \to \Lambda'_j}$$

- onde $1 \leq j \leq l$.
- (1) Para todo $i \leq k$, obtemos uma prova R_i do seqüente $B(t_i), \Gamma \to \Delta$ através da substituição de todas as l variáveis a_j pelo termo t_i, em todos os lugares de R, substituindo todos os ancestrais diretos da fórmula do corte $(\exists x)B(x)$ em R por $B(t_i)$, e removendo as l inferências ($\exists$esq).

- Não é difícil notar que esta operação resulta em uma prova válida, pois como P está na forma normal para variáveis livres, isso garante que as substituições de a_js por t_i não interferirá nas condições para as eigenvariáveis das inferências de R.
- Agora, obtemos Q' a partir de Q através da substituição de cada seqüente $\Pi \to \Lambda$ em Q pelo seqüente $\Pi, \Gamma \to \Delta, \Lambda\text{-}$, onde $\Lambda\text{-}$ é obtido de Λ pela retirada de todos os ancestrais diretos da fórmula do corte $(\exists x)B(x)$.
- Claramente, Q' termina com o seqüente $\Gamma, \Gamma \to \Delta, \Delta$, mas no entanto, não é uma prova válida. Para consertá-la precisamos fazer o seguinte:
  - Os seqüentes iniciais de Q' serão da forma inválida: $D, \Gamma \to \Delta, D$. Mas partindo de $D \to D$, obtemos $D, \Gamma \to \Delta, D$ de modo válido apenas com regras de enfraquecimento e troca.
  - Para $1 \leq i \leq k$ a i-ésima inferência ($\exists$dir) enumerada acima terá, em Q' a forma:

$$\frac{\Pi_i, \Gamma \to \Delta, \Lambda_i, B(t_i)}{\Pi_i, \Gamma \to \Delta, \Lambda_i}$$

  - Esta inferência pode ser substituída pelas seguintes inferências (um corte e, possivelmente algumas trocas à direita no seqüente superior esquerdo):

$$\frac{\Pi_i, \Gamma \to \Delta, \Lambda_i, B(t_i) \qquad \begin{matrix}[R_i] \\ B(t_i), \Gamma \to \Delta\end{matrix}}{\Pi_i, \Gamma \to \Delta, \Lambda_i}$$

  - Repare que em (1) construímos a subprova do seqüente superior direito.
  - Repare também que substituímos uma inferência ($\exists$dir) por um corte de altura d-1 juntamente com algumas inferências fracas.
- Estas mudanças tornam Q' uma prova válida. Em particular as condições para as eigenvariaveis continuam valendo, uma vez que nenhuma variável livre em $\Gamma \to \Delta$ é usada como eigenvariável em Q.
- Adicionando algumas trocas e contrações ao final desta prova obtemos a desejada prova P^* de $\Gamma \to \Delta$.
- É claro que todos os cortes em P^* tem altura $< d$.
- Por inspeção na construção de P^* seu tamanho pode ser limitado por:

$$\|P^*\| \leq \|Q\|.(\|R\|+1) < \|P\|^2.$$

<u>CASO (f)</u>: A é $(\forall x)B(x)$.

- Este caso é completamente dual ao caso (e) anterior:

<u>CASO (g)</u>: A é atômica.

- Então P tem a seguinte forma:

$$P \equiv \quad \dfrac{\begin{matrix}[Q] \\ \Gamma \to \Delta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[R] \\ A, \Gamma \to \Delta\end{matrix}}{\Gamma \to \Delta}$$

- Obtemos R' a partir de R substituindo todo seqüente $\Pi \to \Lambda$ em R pelo seqüente $\Pi\text{-}, \Gamma \to \Delta, \Lambda$, onde Π- é Π menos todas as ocorrências de ancestrais diretos de A.
- R' terminará com o seqüente final $\Gamma, \Gamma \to \Delta, \Delta$ e é uma prova válida, exceto pelos seus seqüentes iniciais.
- Os seqüentes iniciais $B \to B$, de R, com $B \neq A$ se tornam $B, \Gamma \to \Delta, B$ em R'.
    - É fácil obter uma derivação válida do segundo seqüente a partir do primeiro, através de enfraquecimentos e trocas.
- Já os seqüentes iniciais $A \to A$ de R, se tornam $\Gamma \to \Delta, A$ em R'.
    - Mas repare que $\Gamma \to \Delta, A$ é exatamente o seqüente final de Q.
- A prova desejada P^* é então obtida de R' adicionando-se algumas inferências fracas e algumas cópias da subprova Q a folhas de R', e adicionando-se algumas trocas e contrações ao final de R'.
- Como os cortes de Q e R são todos de altura $<d$ (ou seja, Q e R não têm corte, já que como A é atômico neste caso, d=0), então P^* também tem apenas cortes de altura $< d$.
- Além disso, como o número de seqüentes iniciais de R' é limitado por $\|R\| +1$, o tamanho de P^* pode ser limitado por:

$$\|P^*\| \leq \|R\|+\|Q\|.(\|R\|+1) < (\|Q\|+1)(\|R\|+1) < \|P\|^2.$$

- E isso FINALMENTE completa a prova do Lema 2.4.2.1, que mostrou como substituir um simples corte por inferências com cortes de menor altura. Iterando esta construção será possível remover todos os cortes de altura máxima d em uma prova. Este fato será estabelecido no lema seguinte (2.4.2.2). O Teorema da Eliminação do Corte será um corolário destes dois lemas.

2.4.2.2. Lema

Se P é uma LK-prova cuja altura máxima de seus cortes é d, então há uma LK-prova P^* do mesmo seqüente final cuja altura máxima de seus cortes é estritamente menor que d e cujo tamanho é $\|P^*\| < {}_2 2^{\|P\|}$.

<u>PROVA</u>: por indução em $n(\mathrm{P},d)$, o número de cortes com altura máxima d em P.

<u>BASE</u>: $n(\mathrm{P},d) = 0$

- Neste caso, não há corte com profundidade d. Logo, P* é o próprio P, pois todos os cortes em P têm altura máxima $< d$ e $\|\mathrm{P}\| < {}_2 2^{\|\mathrm{P}\|}$.

<u>PASSO INDUTIVO</u>: $n(\mathrm{P},d) > 0$ (o número de cortes com altura máxima d é > 0)

<u>HIPÓTESE INDUTIVA (HI)</u>: se T é uma prova e $n(\mathrm{T},d) < n(\mathrm{P},d)$, então o lema vale para T:

  - Há uma prova T* com o mesmo seqüente final de T, cuja altura máxima de seus cortes é menor que d e $\|\mathrm{T}^*\| < {}_2 2^{\|\mathrm{T}\|}$.

- É suficiente analisar o caso em que P termina com uma inferência do corte cuja fórmula do corte A tem altura d. (POR QUÊ?)

$$\mathrm{P} \equiv \qquad \dfrac{\overset{[\mathrm{Q}]}{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathrm{A}} \qquad \overset{[\mathrm{R}]}{\mathrm{A}, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- Suponha, primeiramente, que uma das subprovas, digamos R, não possui inferência forte. Ou seja, $\|\mathrm{R}\| = 0$. Então uma das duas alternativas seguintes ocorrem:
  1. R contém $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ como seqüente inicial;
  2. Há, em R, um ancestral direto da fórmula do corte A que foi obtido por enfraquecimento.
  - No caso (1) A deve ocorrer em Δ e a prova P* desejada pode ser obtida de Q adicionando-se algumas *trocas* e uma *contração* ao final.
  - No caso (2) P* pode ser obtida de R removendo-se o enfraquecimento à esquerda que introduz o ancestral direto da fórmula do corte A (e possivelmente removendo-se algumas trocas e contrações envolvendo estes A's).
- Um argumento completamente similar funciona para o caso em que $\|\mathrm{Q}\| = 0$.
- Em ambos os casos, $\|\mathrm{P}^*\| < \|\mathrm{P}\| < {}_2 2^{\|\mathrm{P}\|}$.
- Suponha agora que haja inferências fortes tanto em R quanto em Q.
- Note que tanto em R quanto em Q, o número de cortes com altura d é menor que $n(\mathrm{P},d)$, já que há um corte de altura d em P que está fora tanto de Q quanto de R.
- Logo, a hipótese de indução HI vale para R e Q.
- Então há provas Q* e R* dos mesmos seqüentes finais de R e Q com todos os cortes com altura menor que d e que:

$$\|\mathrm{Q}^*\| < {}_2 2^{\|\mathrm{Q}\|} \quad \text{e} \quad \|\mathrm{R}^*\| < {}_2 2^{\|\mathrm{R}\|}$$

- Considere então a seguinte prova:

$$\dfrac{\overset{[\mathrm{Q}^*]}{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathrm{A}} \qquad \overset{[\mathrm{R}^*]}{\mathrm{A}, \Gamma \rightarrow \Delta}}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

- Aplicando o Lema 2.4.2.1 a esta prova obtemos uma prova P* de $\Gamma \rightarrow \Delta$ em que todos os cortes têm altura < d tal que:

$$\|P^*\| \; < \; (\|Q^*\| + \|R^*\| + 1)^2 \; \leq \; ({}_{2}2^{\|Q\|} + {}_{2}2^{\|R\|} - 1)^2 \; < \; {}_{2}2^{\|Q\|+\|R\|+1} \; = \; {}_{2}2^{\|P\|}$$

- Isso termina a prova do lema 2.4.2.2.

Teorema da Eliminação do Corte

Seja P uma LK-prova e suponha que toda fórmula do corte em P tem altura menor ou igual a *d*. Então há uma LK-prova livre de corte, P*, com o mesmo seqüente final que P, cujo tamanho é: $\|P^*\| < 2_{(2d+2)}^{\|P\|}$.

<u>PROVA</u>:

- Trivial, por aplicações sucessivas do lema 2.4.2.2 e propriedades aritméticas p/ o cálculo da cota.

Cota Geral para Provas Livres de Corte.

- A cota para provas livres de corte, obtida no Teorema da Eliminação do corte depende de duas variáveis: o tamanho da prova original que pretendemos retirar os cortes e a altura máxima das fórmulas do corte desta prova.
- É possível obter uma cota mais geral do que essa, definida apenas sobre uma variável: o tamanho da prova original: $\|P^*\| < 2_{2\|P\|}^{\|P\|}$. (ver prova p. 42).

Teorema da Eliminação dos Cortes-Livres

- Investigaremos a possibilidade de eliminar cortes em sistemas de LK$\mathfrak{I}$-provas, ou seja, sistemas com as mesmas regras de LK que, no entanto, admitam que os seqüentes iniciais possam vir de $\mathfrak{I}$, onde presume-se que conjunto $\mathfrak{I}$ de seqüentes é fechado para substituição.
- Um importante exemplo de tal conjunto $\mathfrak{I}$ é dado pelos axiomas de LK*e*. No entanto, $\mathfrak{I}$ pode também ser o conjunto de axiomas de qualquer teoria de primeira ordem.

2.4.4.1. Definições

- Seja P uma LK$\mathfrak{I}$-prova. Uma <u>***fórmula***</u> em P está <u>***ancorada***</u> (por um $\mathfrak{I}$-seqüente) se é um descendente direto de uma fórmula que ocorre em um seqüente inicial de P que pertence a $\mathfrak{I}$.
- Uma <u>***inferência do corte***</u> em P está <u>***ancorada***</u> se uma das duas condições abaixo é satisfeita:
    1. A fórmula do corte não é atômica e pelo menos uma de suas duas ocorrências na inferência de corte está ancorada.
    2. A fórmula do corte é atômica e suas duas ocorrências na inferência do corte estão ancoradas.
- Uma <u>***inferência do corte***</u> que não está ancorada é dita <u>***livre***</u>.
- Uma <u>***prova***</u> P é <u>***livre de cortes livres***</u> se não contém cortes livres.

2.4.4.2. Ocorrência Introduzida Somente de Modo Fraco

- Uma ***ocorrência de fórmula*** em uma prova P é ***introduzida somente de modo fraco*** em P se nenhum de seus ancestrais diretos ocorre em um seqüente inicial ou é fórmula principal de uma inferência forte.
- Com freqüência *é conveniente assumir que* uma prova P satisfaz a condição de que *nenhuma fórmula do corte é introduzida somente de modo fraco*.
  - **Ou seja**: toda inferência do corte satisfaz a condição de que nenhuma ocorrência de sua fórmula do corte é introduzida somente de modo fraco em P.
- Se P é uma LK$\mathfrak{I}$-prova, então podemos, sem perda de generalidade (w.l.o.g.), satisfazer esta condição extra sem que isso produza algum aumento no tamanho da prova ou na altura dos cortes da prova.
- No entanto, quando eliminamos um corte cuja fórmula do corte A é introduzida somente de modo fraco, pode ocorrer que um outro corte, cuja fórmula do corte é B, antes ancorado, torne-se corte livre. (veja p. 43)
- Para evitar este caso, que poderia estragar uma prova por indução na altura máxima dos cortes livres, vamos assumir que nenhuma fórmula do corte em P é introduzida somente de modo fraco.

2.4.5. Teorema da Eliminação dos Cortes Livres

Seja $\mathfrak{I}$ um conjunto de seqüentes fechado para substituição. Então:

1. Se LK$\mathfrak{I}$ $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ então há uma LK$\mathfrak{I}$-prova sem cortes livres de $\Gamma \rightarrow \Delta$.
2. Seja P uma LK$\mathfrak{I}$-prova que satisfaz a condição 2.4.4.2 e suponha que toda fórmula do corte ancorada em P tem altura menor do que d. Então há uma LK$\mathfrak{I}$-prova sem cortes livres P^* do mesmo seqüente final, cujo tamanho é: $\|P^*\| < 2_{(2d+2)}^{\|P\|}$.

- Veja a prova nas páginas 44 a 47.

-+

R. ESTRUTURAIS FRACAS		
	troca à esq.	troca à dir.
	$\dfrac{\Gamma, A, B, \Pi, \rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi, \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Lambda}$
	contração à esq.	contração à dir.
	$\dfrac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}$
	enfraq. à esq.	enfraq. à dir.
	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A}$
CORTE:	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}$	

R. PROPOSICIONAIS		
	$\sim$esq	$\sim$dir
	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\sim A, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \sim A}$
	$\wedge$esq	$\wedge$dir
	$\dfrac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \wedge B}$
	$\vee$esq	$\vee$dir
	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B}$
	$\supset$esq	$\supset$dir
	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B}$

$\forall$esq	$\forall$dir	$\exists$esq	$\exists$dir
$\dfrac{A(t), \ \Gamma \rightarrow \Delta}{(\forall x)A(x), \ \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(b)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\forall x)A(x)}$	$\dfrac{A(b), \Gamma \rightarrow \Delta}{(\exists x)A(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta, (\exists x)A(x)}$
REGRAS QUANTIFICACIONAIS			

- REGRAS FRACAS: as regras estruturais fracas também são chamadas apenas de ***regras fracas***.

- REGRAS FORTES: as outras regras de inferência são chamadas de regras fortes.

- REGRAS ESTRUTURAIS: as regras de inferência estruturais consistem das regras estruturais fracas mais a regra do corte.

=+=

- FÓRMULA PRINCIPAL: todas as regras de inferência, com exceção do corte, têm uma ***fórmula principal***, que é a fórmula que ocorre no seqüente inferior que não está nos cedentes Γ ou Δ (ou Π ou Λ).
    - As regras de troca têm duas fórmulas principais.

- FÓRMULA AUXILIAR: toda inferência, exceto o enfraquecimento, tem uma ***fórmula auxiliar***, que são as fórmulas A e B que ocorrem no(s) seqüente(s) superiore(s) da inferência.

- FÓRMULAS LATERAIS: as fórmulas que ocorrem nos dedentes Γ, Δ, Π ou Λ são chamadas ***fórmulas laterais***.

- FÓRMULAS DO CORTE: as duas fórmulas auxiliares da regra do corte são chamadas de ***fórmulas do corte***.