XIV Semana de Filosofia da UFRN

Lógica se Aprende Fazendo

ferramentas computacionais para estudar lógica

Base de Pesquisa em Lógica, Conhecimento e Educação

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves

Departamento de Filosofia - DEFIL
Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes – CCHLA
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
e-mail: durante@ufrnet.br
tel: (84) 215-3566

UFRN

CCHLA

Language, Proof and Logic

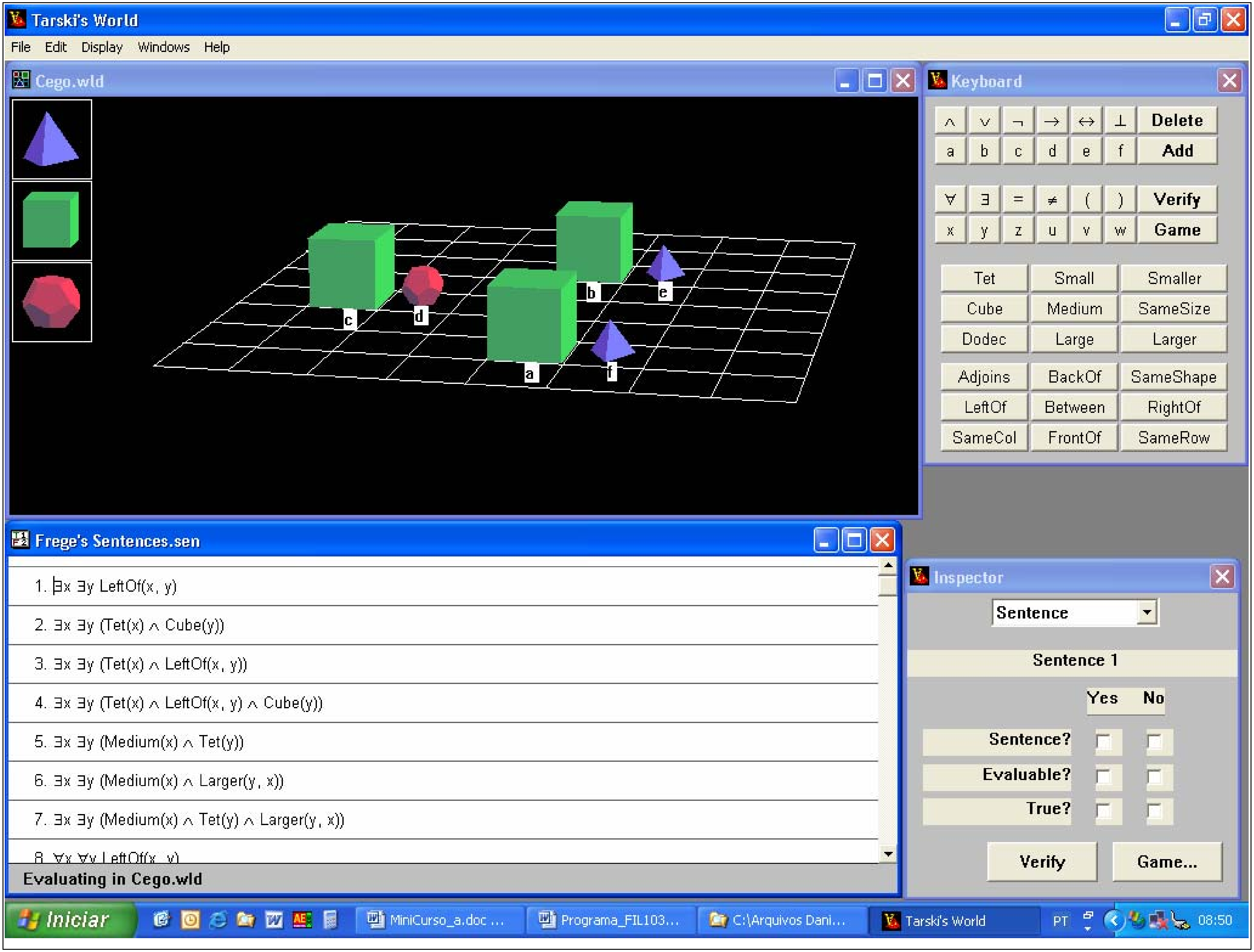
Jon Barwise & John Etchemendy

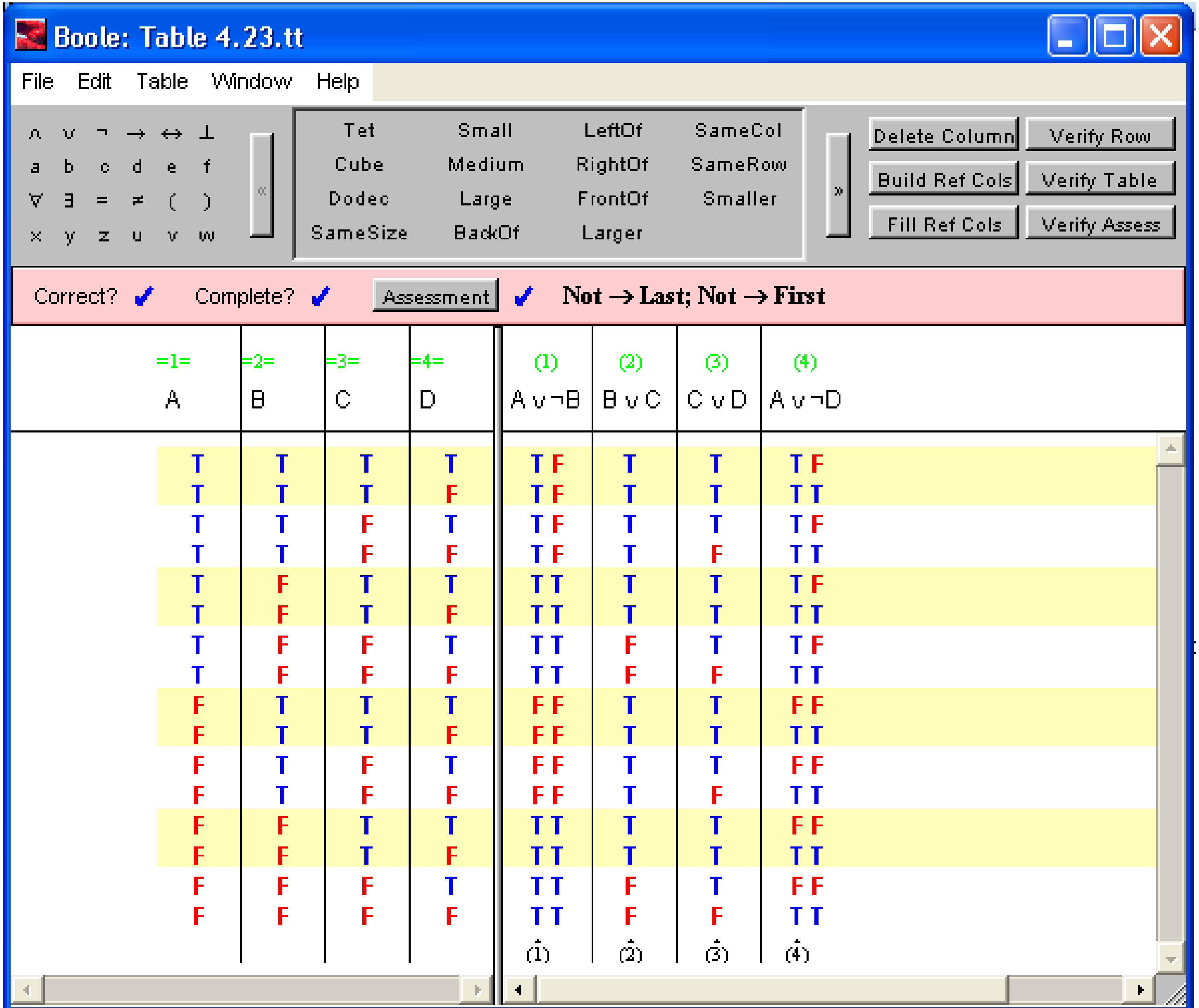
Stanford & NewYork: Seven Bridges Press &
Center for Study of Language and Information, 2000

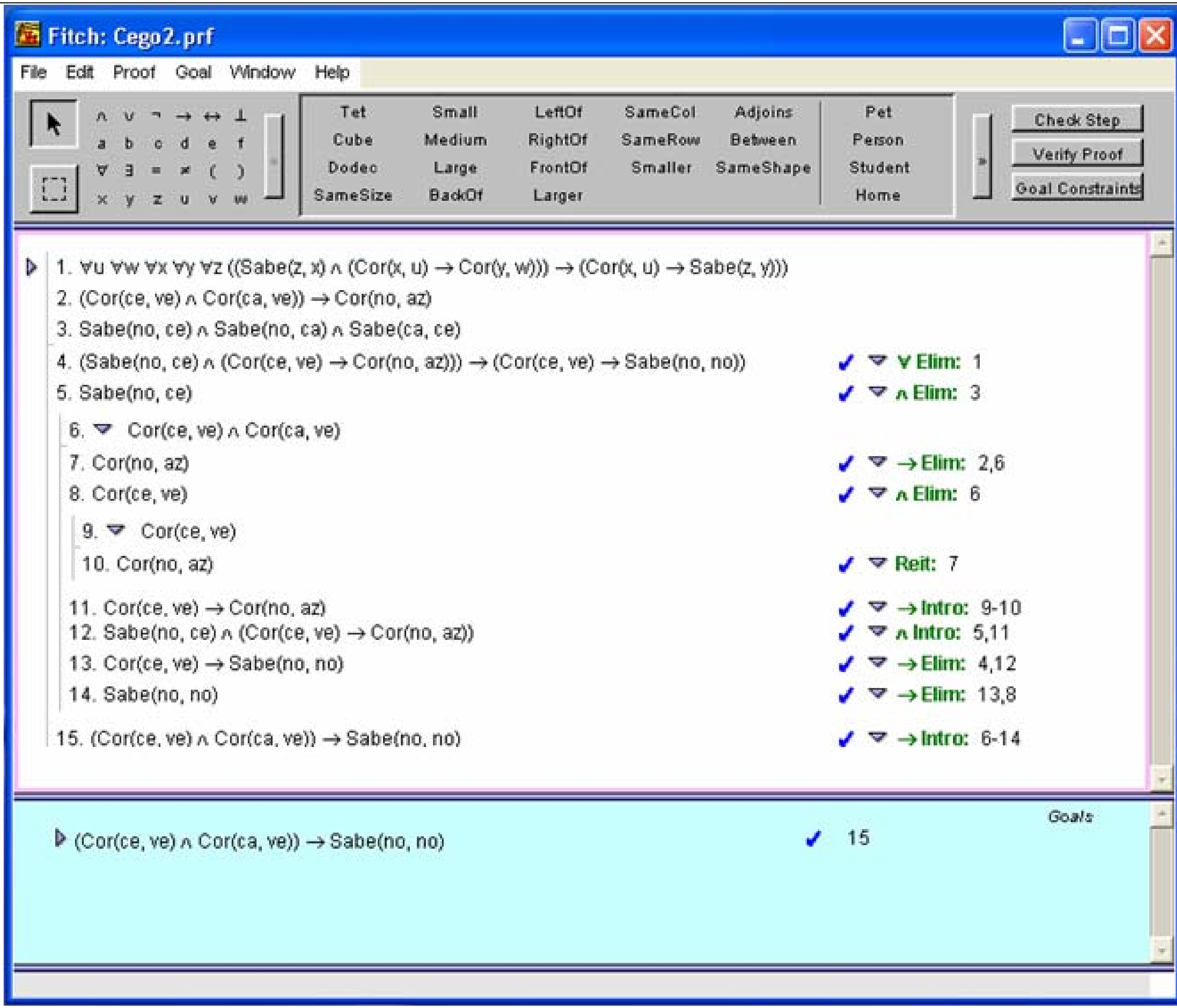
Mundo de Tarski

Boole

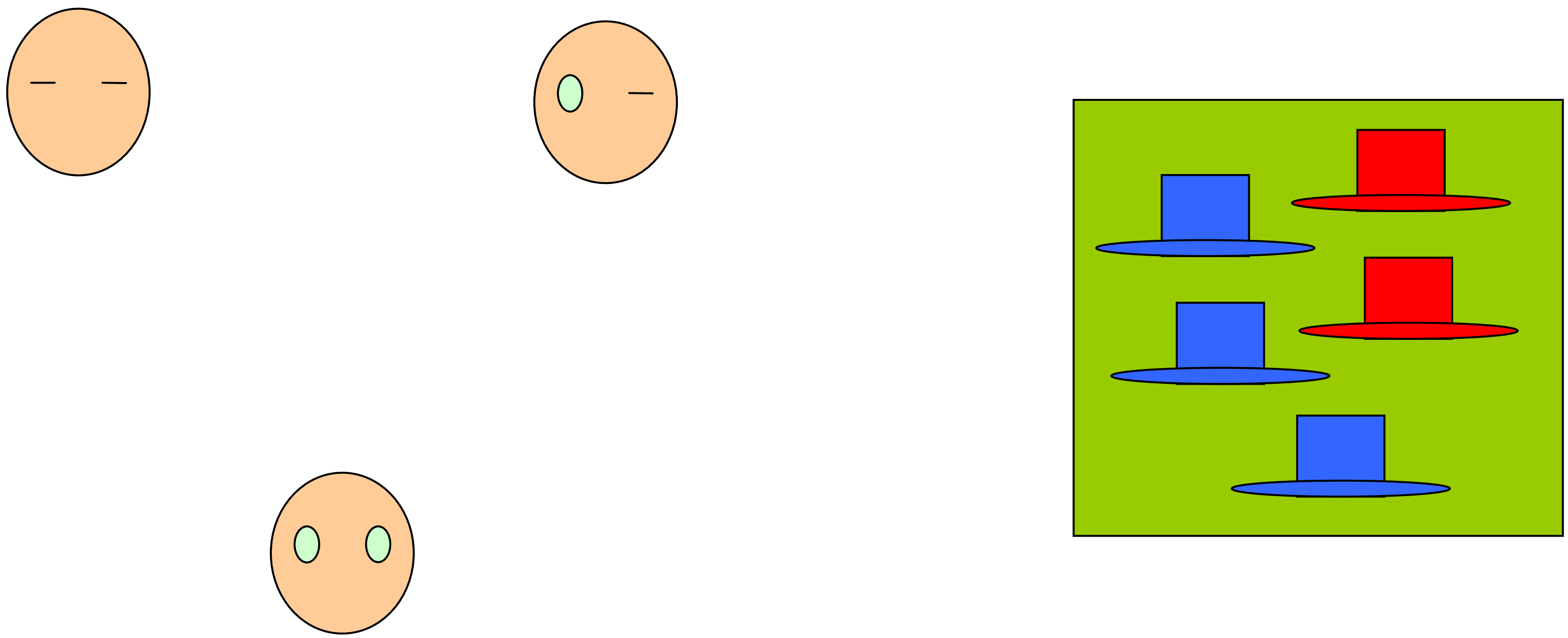
Fitch


Tarski's World
File Edit Display Windows Help
Cego.wld
c
d
b
e
a
f
Keyboard
∧ ∨ ¬ → ↔ ⊥ Delete
a b c d e f Add
∀ ∃ = ≠ ( ) Verify
x y z u v w Game
Tet Small Smaller
Cube Medium SameSize
Dodec Large Larger
Adjoins BackOf SameShape
LeftOf Between RightOf
SameCol FrontOf SameRow
Frege's Sentences.sen
1. ∃x ∃y LeftOf(x, y)
2. ∃x ∃y (Tet(x) ∧ Cube(y))
3. ∃x ∃y (Tet(x) ∧ LeftOf(x, y))
4. ∃x ∃y (Tet(x) ∧ LeftOf(x, y) ∧ Cube(y))
5. ∃x ∃y (Medium(x) ∧ Tet(y))
6. ∃x ∃y (Medium(x) ∧ Larger(y, x))
7. ∃x ∃y (Medium(x) ∧ Tet(y) ∧ Larger(y, x))
8. ∀x ∀y LeftOf(x, y)
Evaluating in Cego.wld
Inspector
Sentence
Sentence 1
Yes No
Sentence?
Evaluable?
True?
Verify Game...
Iniciar
MiniCurso_a.doc ...
Programa_FIL103...
C:\Arquivos Dani...
Tarski's World
PT
08:50


Boole: Table 4.23.tt
File Edit Table Window Help
Tet Small LeftOf SameCol
Cube Medium RightOf SameRow
Dodec Large FrontOf Smaller
SameSize BackOf Larger
Delete Column
Verify Row
Build Ref Cols
Verify Table
Fill Ref Cols
Verify Assess
Correct?
Complete?
Assessment
Not → Last; Not → First
=1= =2= =3= =4= (1) (2) (3) (4)
A B C D A ∨ ¬B B ∨ C C ∨ D A ∨ ¬D
T T T T T F T T T F
T T T F T F T T T T
T T F T T F T T T F
T T F F T F T F T T
T F T T T T T T T F
T F T F T T T T T T
T F F T T T F T T F
T F F F T T F F T T
F T T T F F T T F F
F T T F F F T T T T
F T F T F F T T F F
F T F F F F T F T T
F F T T T T T T F F
F F T F T T T T T T
F F F T T T F T F F
F F F F T T F F T T
(1) (2) (3) (4)


Fitch: Cego2.prf
File Edit Proof Goal Window Help
Tet Small LeftOf SameCol Adjoins Pet
Cube Medium RightOf SameRow Between Person
Dodec Large FrontOf Smaller SameShape Student
SameSize BackOf Larger Home
Check Step
Verify Proof
Goal Constraints
1. ∀u ∀w ∀x ∀y ∀z ((Sabe(z, x) ∧ (Cor(x, u) → Cor(y, w))) → (Cor(x, u) → Sabe(z, y)))
2. (Cor(ce, ve) ∧ Cor(ca, ve)) → Cor(no, az)
3. Sabe(no, ce) ∧ Sabe(no, ca) ∧ Sabe(ca, ce)
4. (Sabe(no, ce) ∧ (Cor(ce, ve) → Cor(no, az))) → (Cor(ce, ve) → Sabe(no, no)) ∀ Elim: 1
5. Sabe(no, ce) ∧ Elim: 3
6. Cor(ce, ve) ∧ Cor(ca, ve)
7. Cor(no, az) → Elim: 2,6
8. Cor(ce, ve) ∧ Elim: 6
9. Cor(ce, ve)
10. Cor(no, az) Reit: 7
11. Cor(ce, ve) → Cor(no, az) → Intro: 9-10
12. Sabe(no, ce) ∧ (Cor(ce, ve) → Cor(no, az)) ∧ Intro: 5,11
13. Cor(ce, ve) → Sabe(no, no) → Elim: 4,12
14. Sabe(no, no) → Elim: 13,8
15. (Cor(ce, ve) ∧ Cor(ca, ve)) → Sabe(no, no) → Intro: 6-14
Goals
(Cor(ce, ve) ∧ Cor(ca, ve)) → Sabe(no, no) 15

QUAL A COR DO CHAPÉU DO CEGO ?



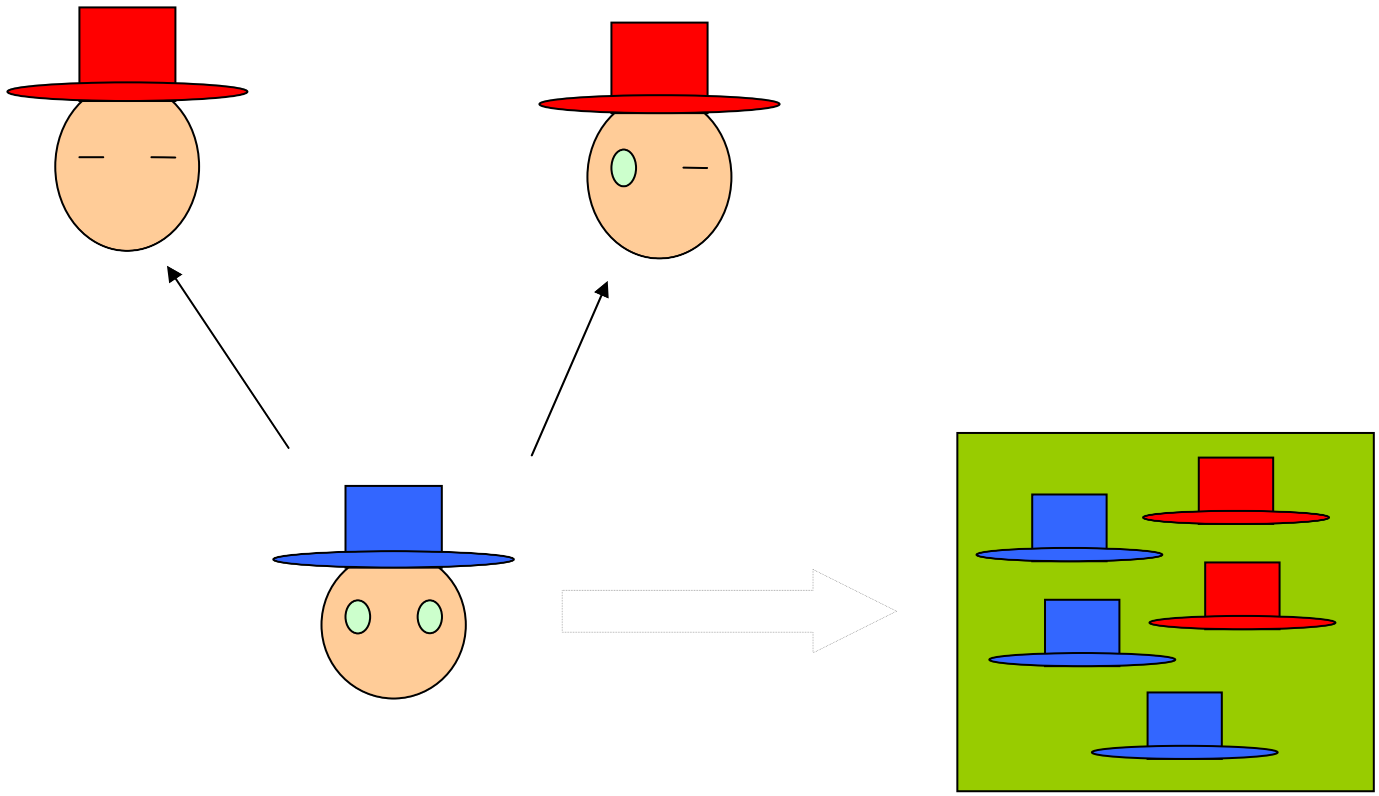
A Cor do Chapéu do Cego

Existem apenas dois chapéus vermelhos. Se tanto o cego quanto o caolho estivessem com chapéus vermelhos, o normal saberia que o seu era azul. O normal não soube dizer a cor de seu chapéu. Logo, entre cego e caolho, pelo menos um tem chapéu azul. Assim, se o chapéu do cego fosse vermelho, o caolho veria e saberia que o seu teria que ser azul.* Mas o caolho não soube dizer a cor de seu chapéu. Logo, o chapéu do cego não poderia ser vermelho. Era azul.

* Caso contrário o normal teria sabido que seu próprio chapéu era azul ao ver dois vermelhos.

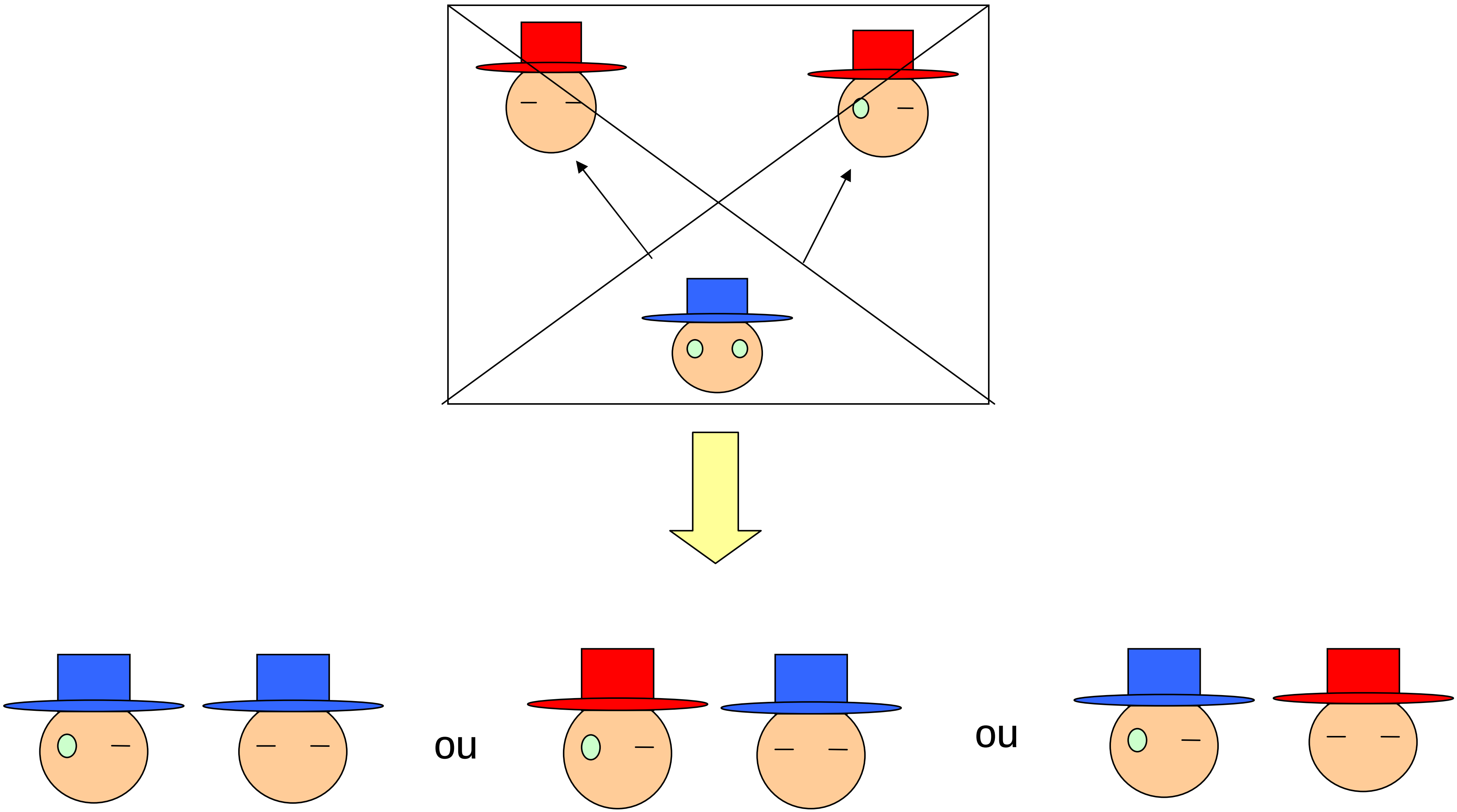
A Cor do Chapéu do Cego

- Existem apenas dois chapéus vermelhos.
- Se tanto o cego quanto o caolho estivessem com chapéus vermelhos, o normal saberia que o seu era azul.

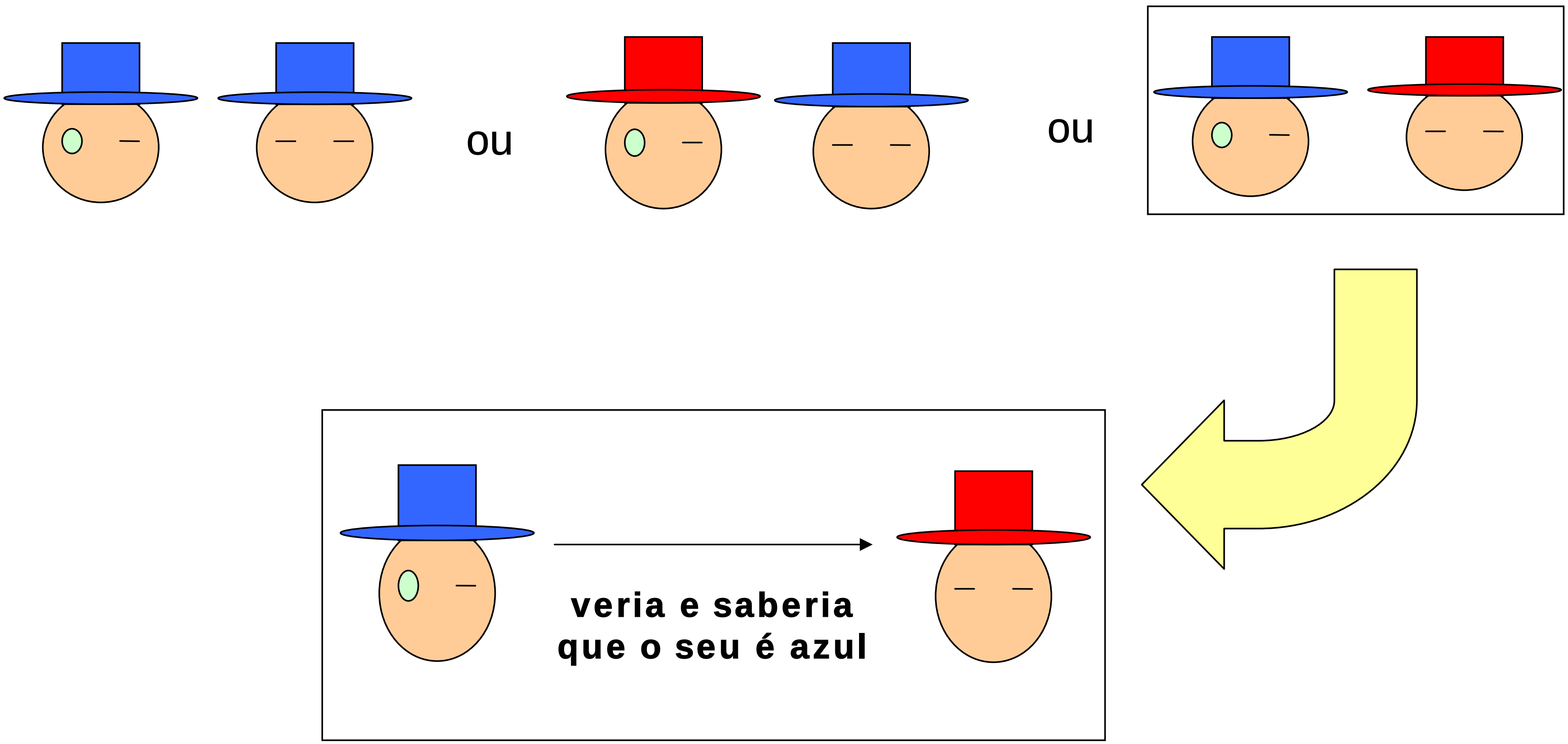


- Se tanto o cego quanto o caolho tivessem chapéus vermelhos, o normal saberia que o seu é azul.
- O normal não soube dizer a cor de seu chapéu.

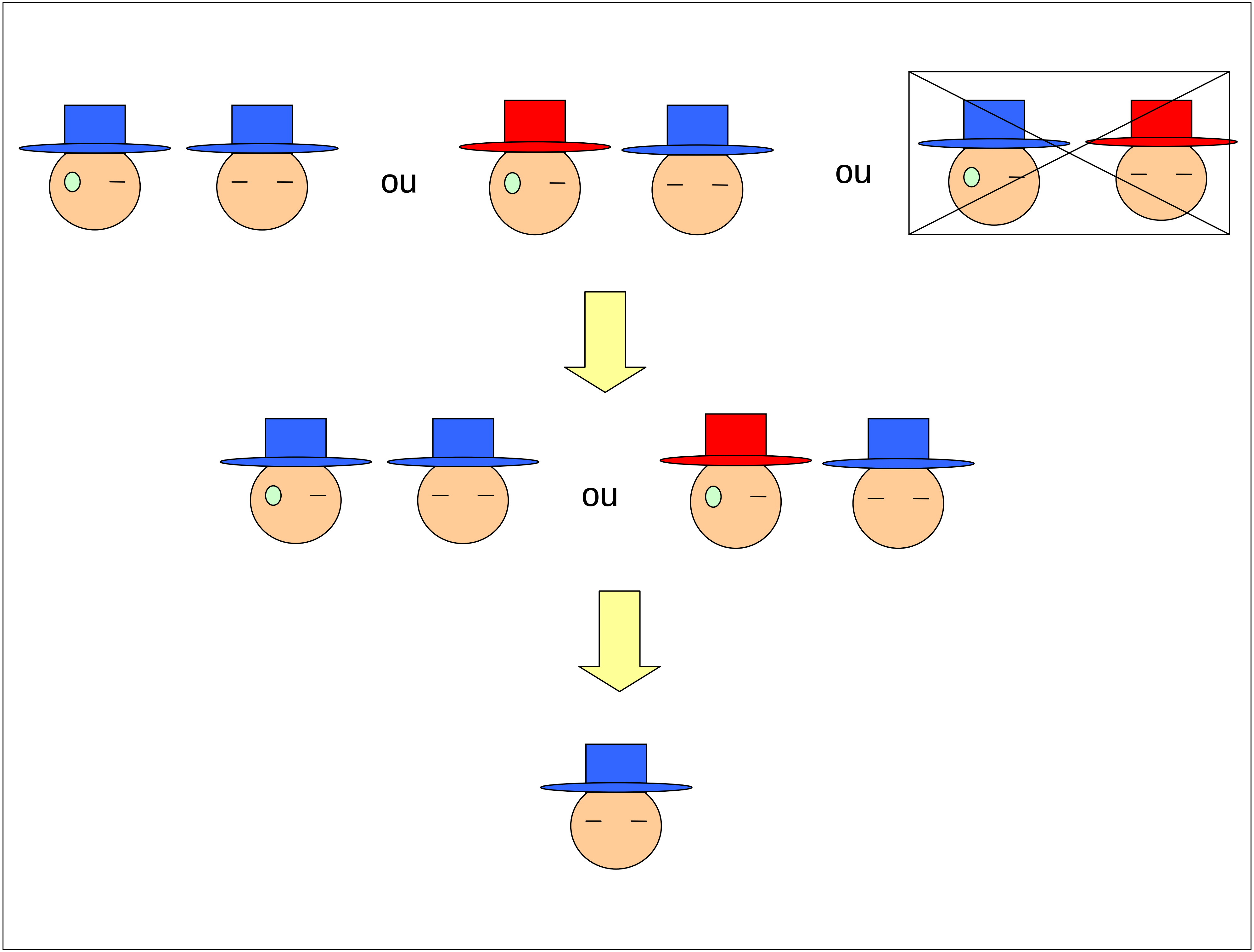
- Ou o cego e o caolho tinham ambos chapéus azuis, ou um tinha chapéu azul e o outro vermelho.


ou
ou

- Ou o cego e o caolho tinham ambos chapéus azuis, ou um tinha chapéu azul e o outro vermelho.
- Se o chapéu do cego fosse vermelho, o caolho veria e saberia que o seu era azul.


ou
ou
veria e saberia
que o seu é azul

- Se o chapéu do cego fosse vermelho, o caolho veria e saberia que o seu era azul.
- O caolho não soube dizer a cor de seu chapéu.
- O chapéu do cego não era vermelho. Era azul.


ou
ou
ou

A Cor do Chapéu do Cego

- Existem apenas dois chapéus vermelhos.
- Se tanto o cego quanto o caolho estivessem com chapéus vermelhos, o normal saberia que o seu era azul.

- Se tanto o cego quanto o caolho tivessem chapéus vermelhos, o normal saberia que o seu é azul.
- O normal não soube dizer a cor de seu chapéu.
- Ou o cego e o caolho tinham ambos chapéus azuis, ou um tinha chapéu azul e o outro vermelho.

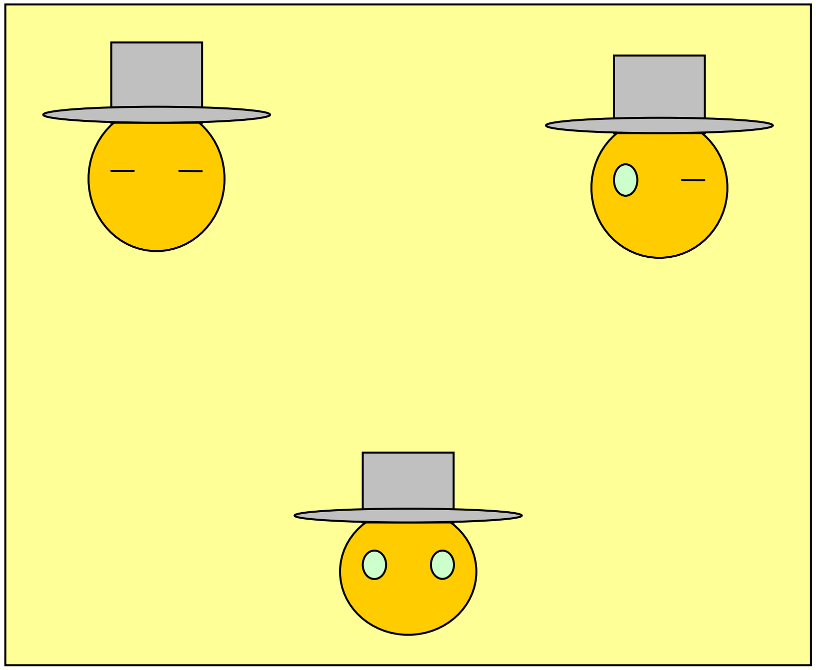
- Ou o cego e o caolho tinham ambos chapéus azuis, ou um tinha chapéu azul e o outro vermelho.
- Se o chapéu do cego fosse vermelho, o caolho veria e saberia que o seu era azul.

- Se o chapéu do cego fosse vermelho, o caolho veria e saberia que o seu era azul.
- O caolho não soube dizer a cor de seu chapéu.
- O chapéu do cego não era vermelho. Era azul.

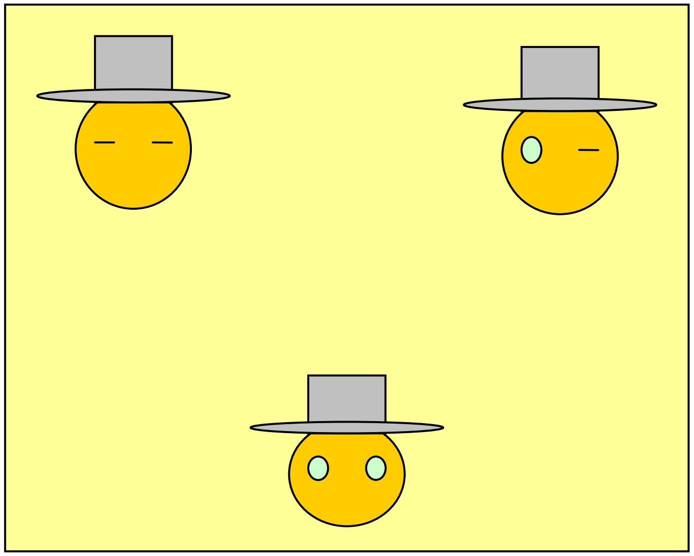
Premissas: Informações Sobre o Problema

(I) Há três participantes distintos na estória: cego, caolho e normal.

(I) Há três participantes distintos na estória: <u>cego</u>, <u>caolho</u> e <u>normal</u>.



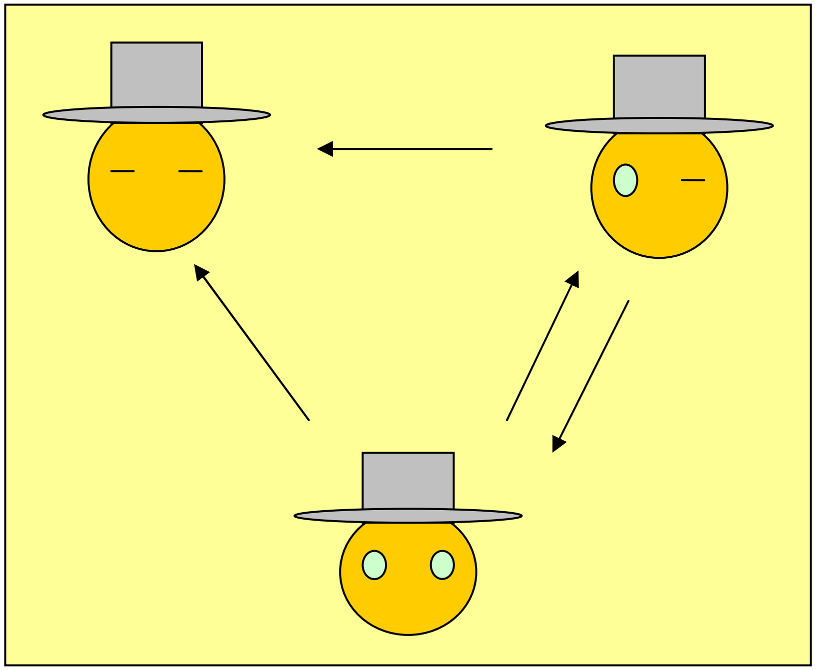
(I) Há três participantes distintos na estória: cego, caolho e normal.



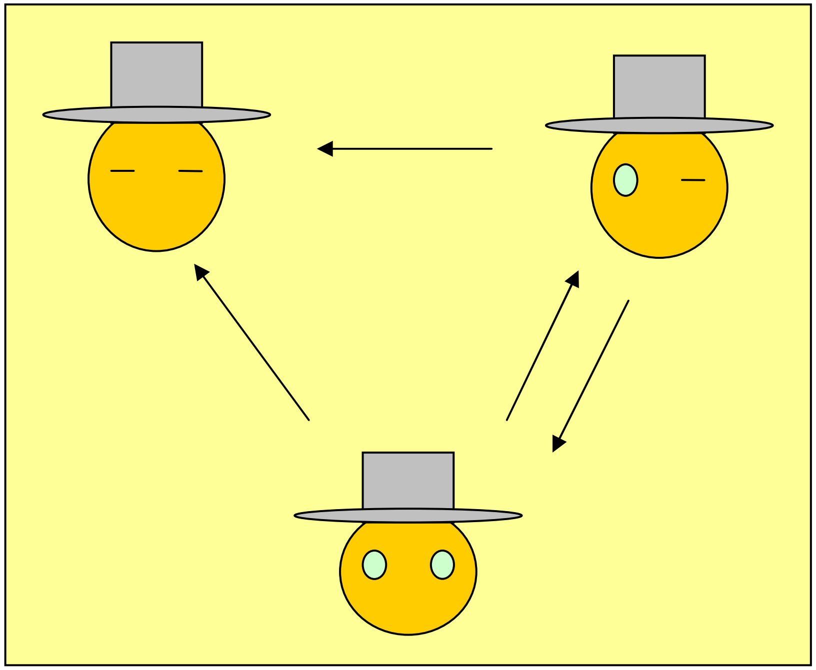
$$\neg(ce = ca) \;\wedge\; \neg(no = ce) \;\wedge\; \neg(no = ca)$$

(II) Normal e caolho sabem a cor dos chapéus dos outros 2.

(II) Normal e caolho sabem a cor dos chapéus dos outros 2.



(II) Normal e caolho sabem a cor dos chapéus dos outros 2.



(a) Sabe(*no*, *ca*)

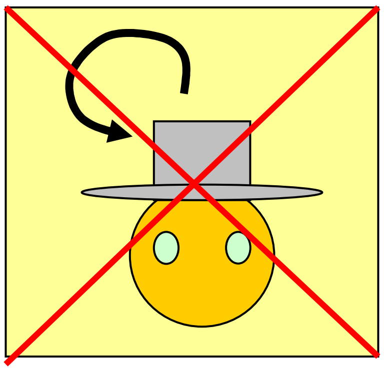
(b) Sabe(*no*, *ce*)

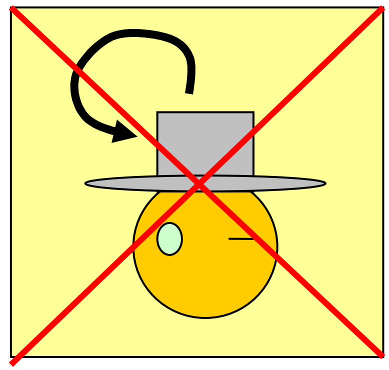
(c) Sabe(*ca*, *no*)

(d) Sabe(*ca*, *ce*)

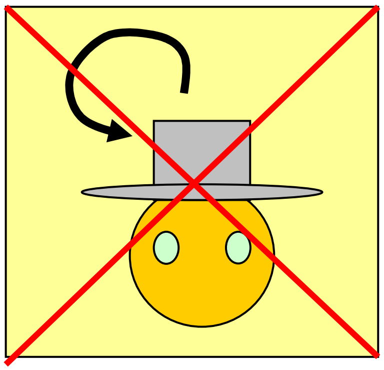
(III) Nem o normal nem o caolho conseguiram deduzir a cor de seus próprios chapéus.

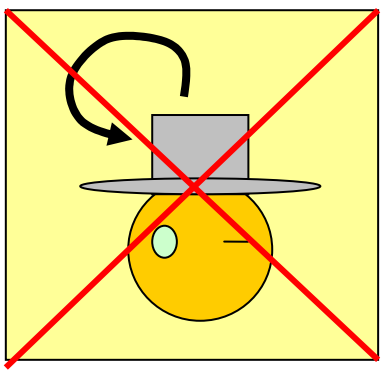
(III) Nem o normal nem o caolho conseguiram deduzir a cor de seus próprios chapéus.





(III) Nem o normal nem o caolho conseguiram deduzir a cor de seus próprios chapéus.



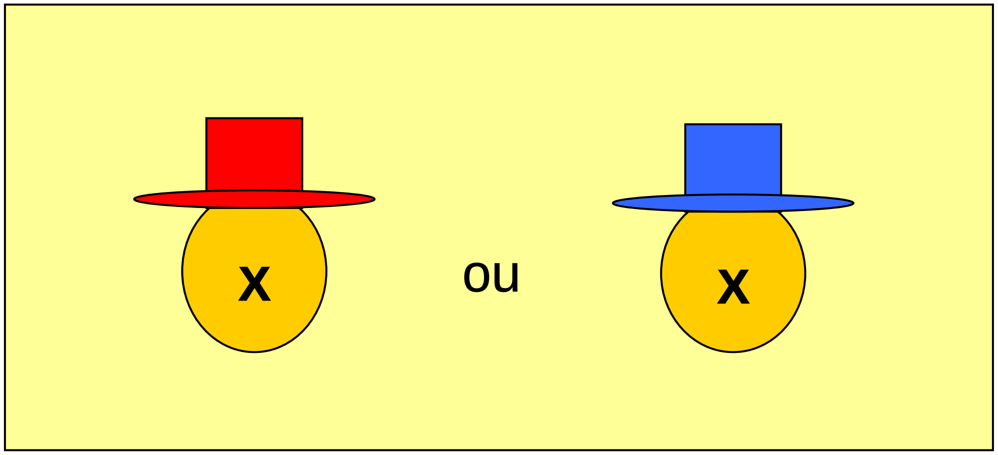


(a) $\neg$Sabe(*no*, *no*)

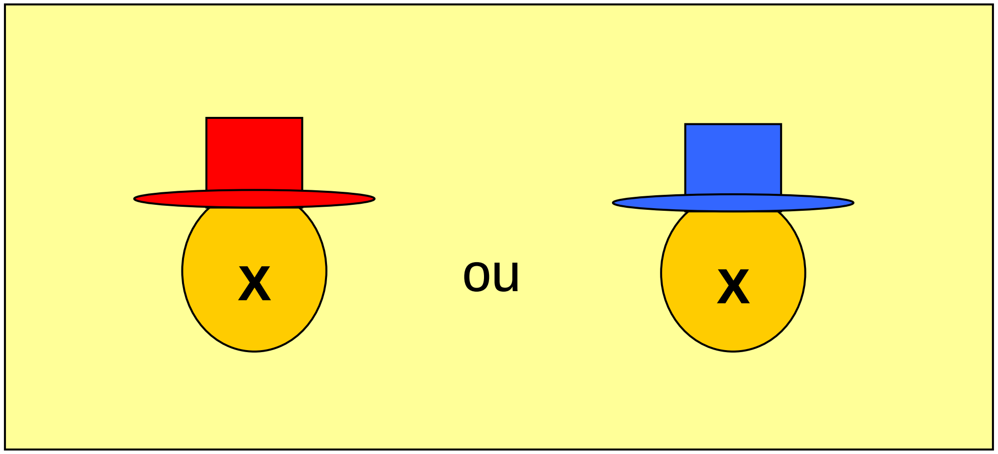
(b) $\neg$Sabe(*ca*, *ca*)

(IV) Só há chapéus vermelhos e azuis.

(IV) Só há chapéus vermelhos e azuis.



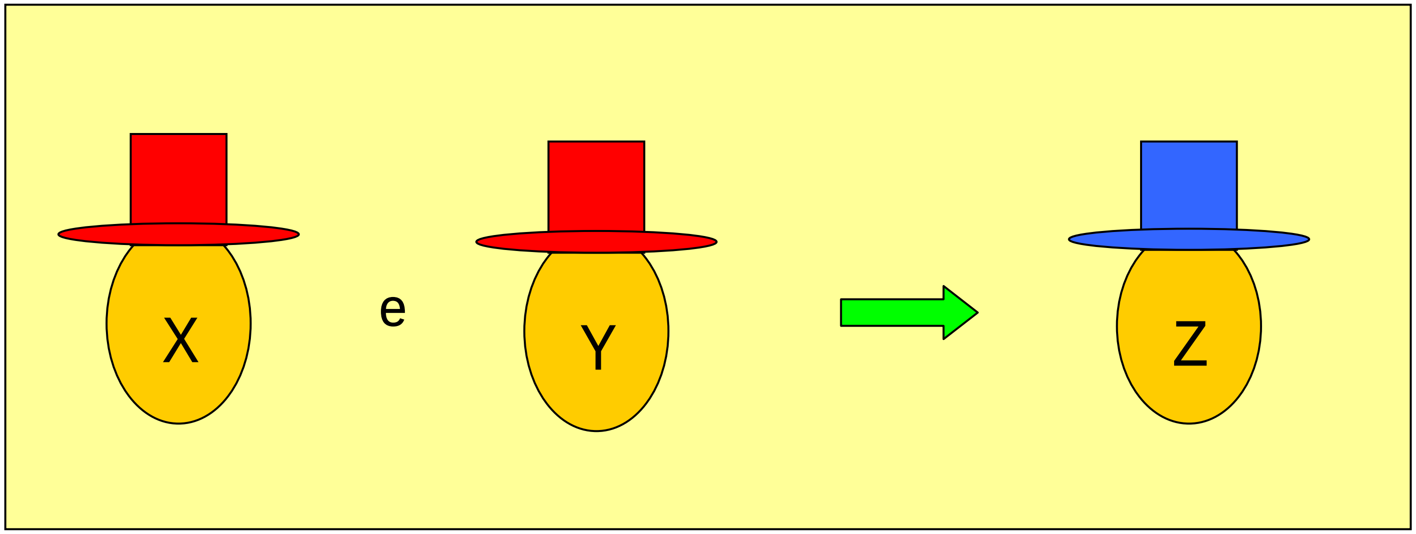
(IV) Só há chapéus vermelhos e azuis.



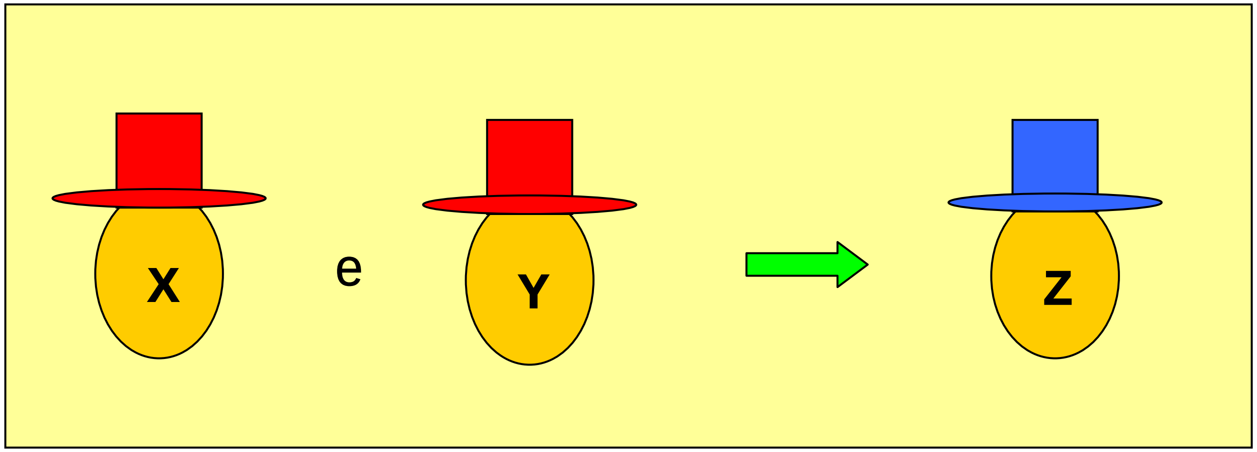
$$\forall x(\mathrm{Cor}(x, \textit{ve}) \vee \mathrm{Cor}(x, \textit{az}))$$

(V) Número máximo de Chapéus Vermelhos é 2.

(V) Número máximo de Chapéus Vermelhos é 2.



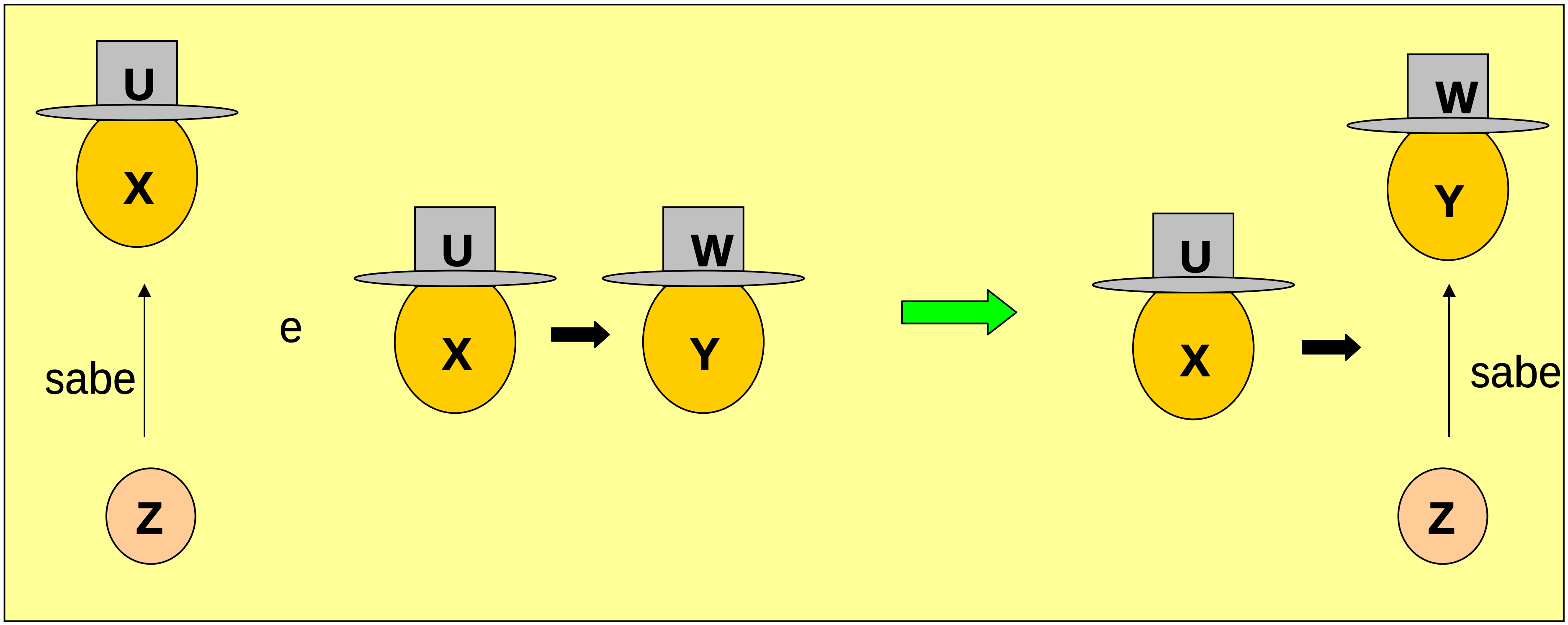
(V) Número máximo de Chapéus Vermelhos é 2.



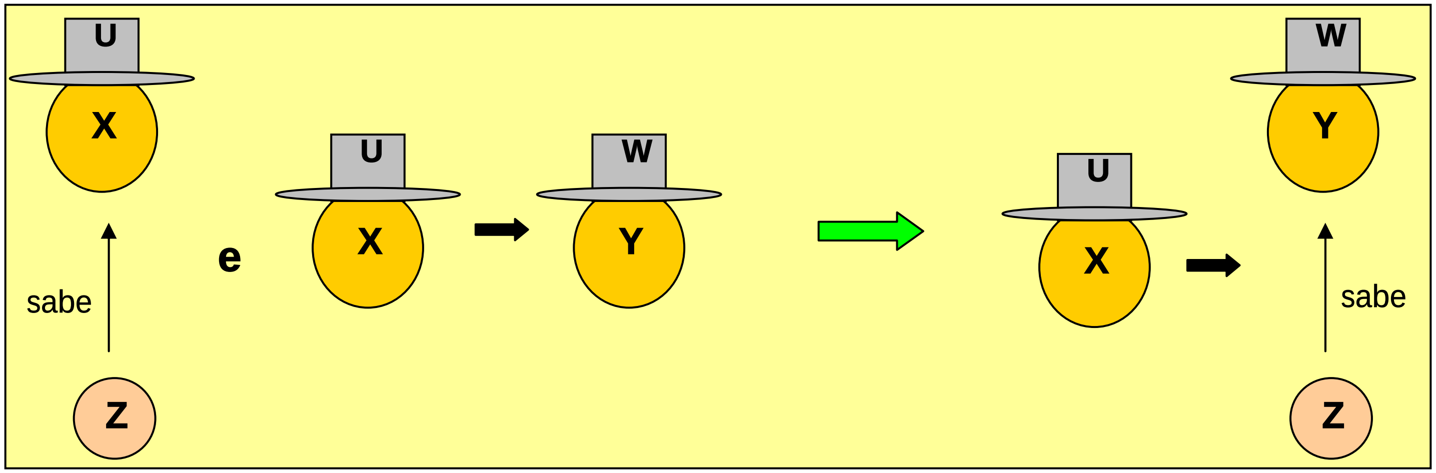
$$\forall x \forall y \forall z((\neg(x = y) \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge \mathrm{Cor}(x, \textcolor{red}{ve}) \wedge \mathrm{Cor}(y, \textcolor{red}{ve})) \rightarrow \mathrm{Cor}(z, \textcolor{blue}{az}))$$

(VI) Os Participantes Sabem Lógica.

(VI) Os Participantes Sabem Lógica.



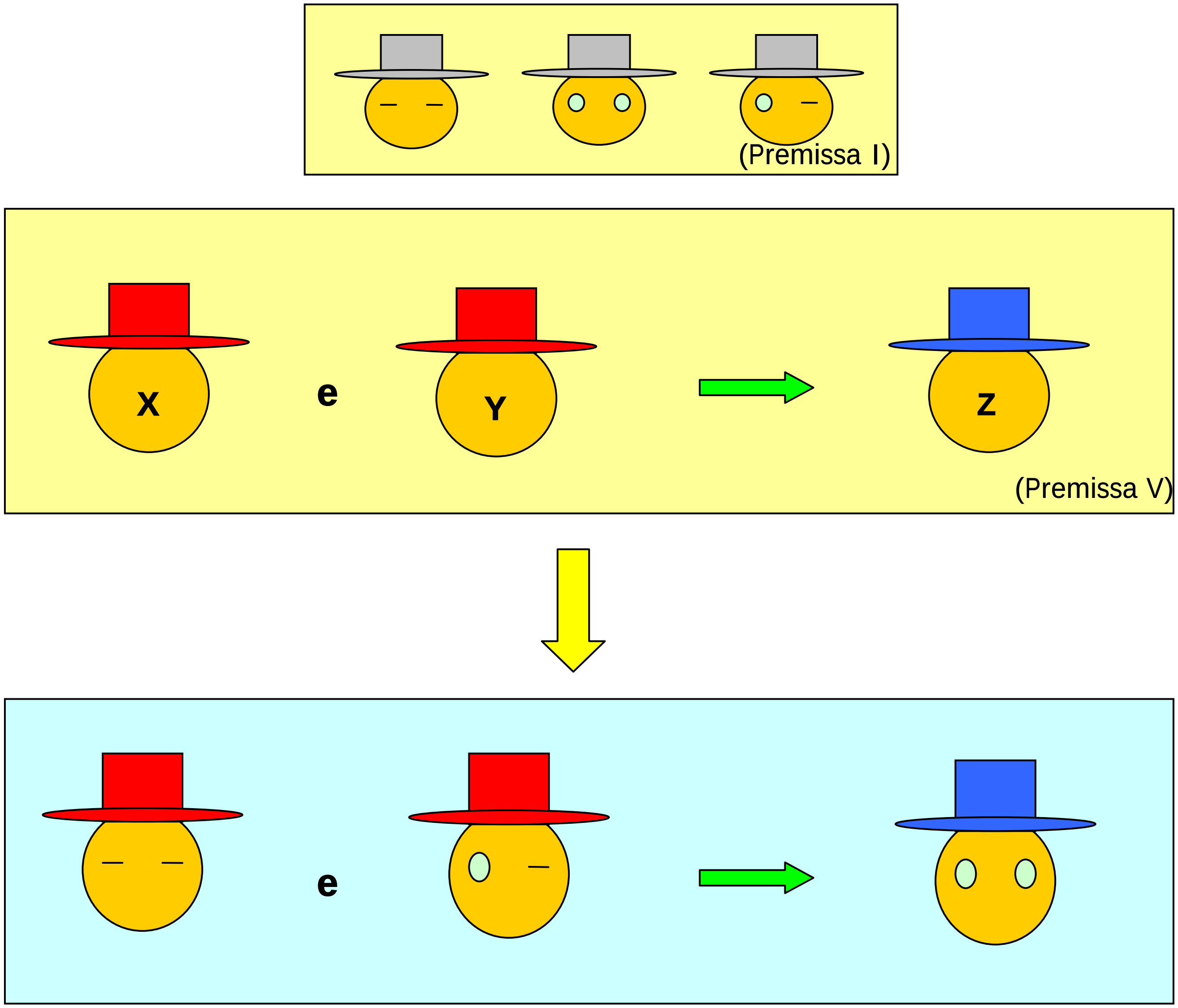
(VI) Os Participantes Sabem Lógica.



$$\forall u \forall w \forall x \forall y \forall z\, ((\text{Sabe}(z, x) \wedge (\text{Cor}(x, u) \rightarrow \text{Cor}(y, w))) \rightarrow (\text{Cor}(x, u) \rightarrow \text{Sabe}(z, y)))$$

Prova: Formalizando a Solução do Problema

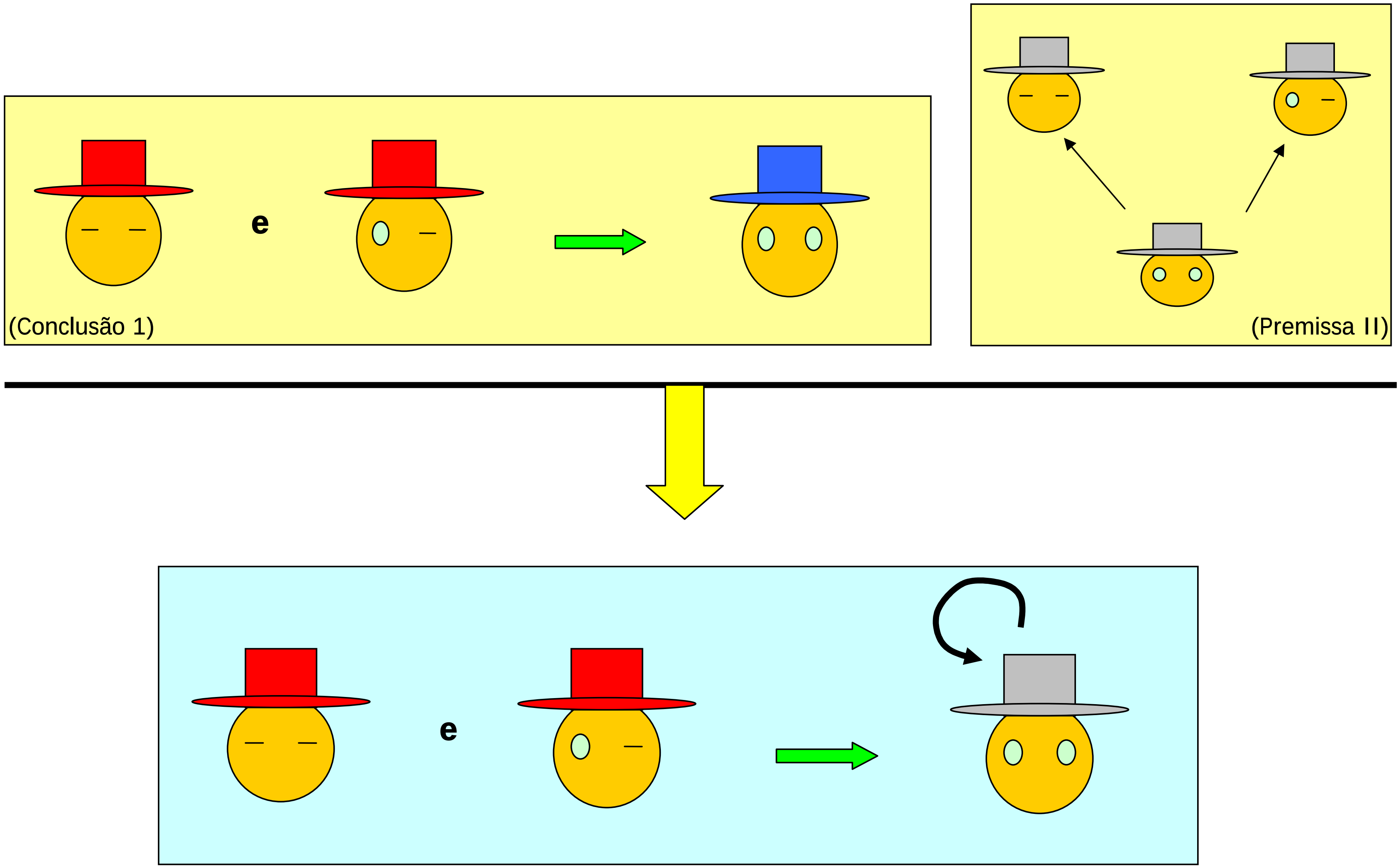
Argumento 1



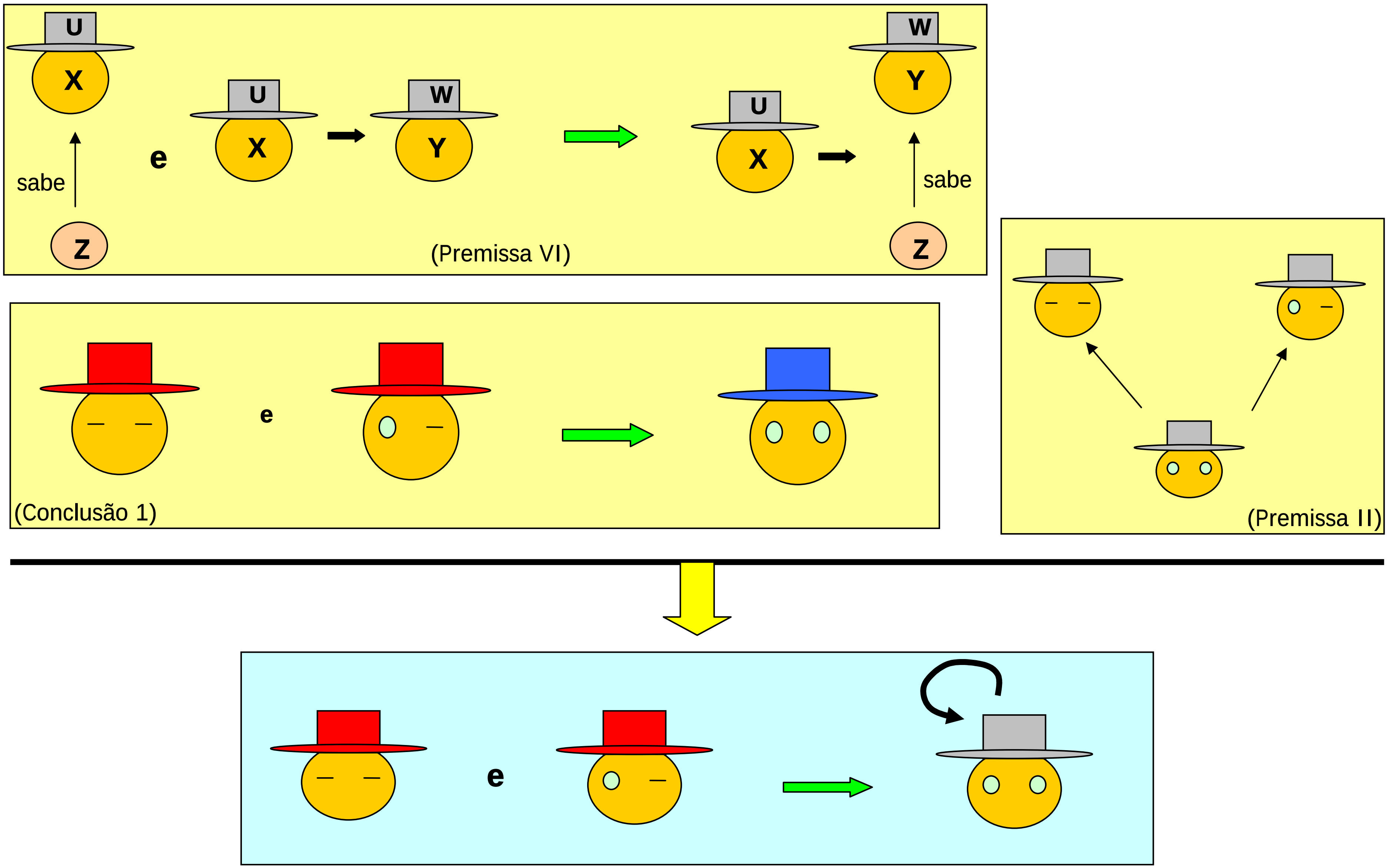
Argumento 1

1.	$\forall x \forall y \forall z(x \neq y \wedge z \neq x \wedge z \neq y \wedge \mathrm{Cor}(x,\ ve) \wedge \mathrm{Cor}(y,\ ve)) \rightarrow \mathrm{Cor}(z,\ az))$	(Premissa V)
2.	$ce \neq ca \wedge no \neq ce \wedge no \neq ca$	(Premissa I)
3.	$(\mathrm{Cor}(ce,\ ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca,\ ve)) \rightarrow \mathrm{Cor}(no,\ az)$	(Conseq.)

Argumento 2



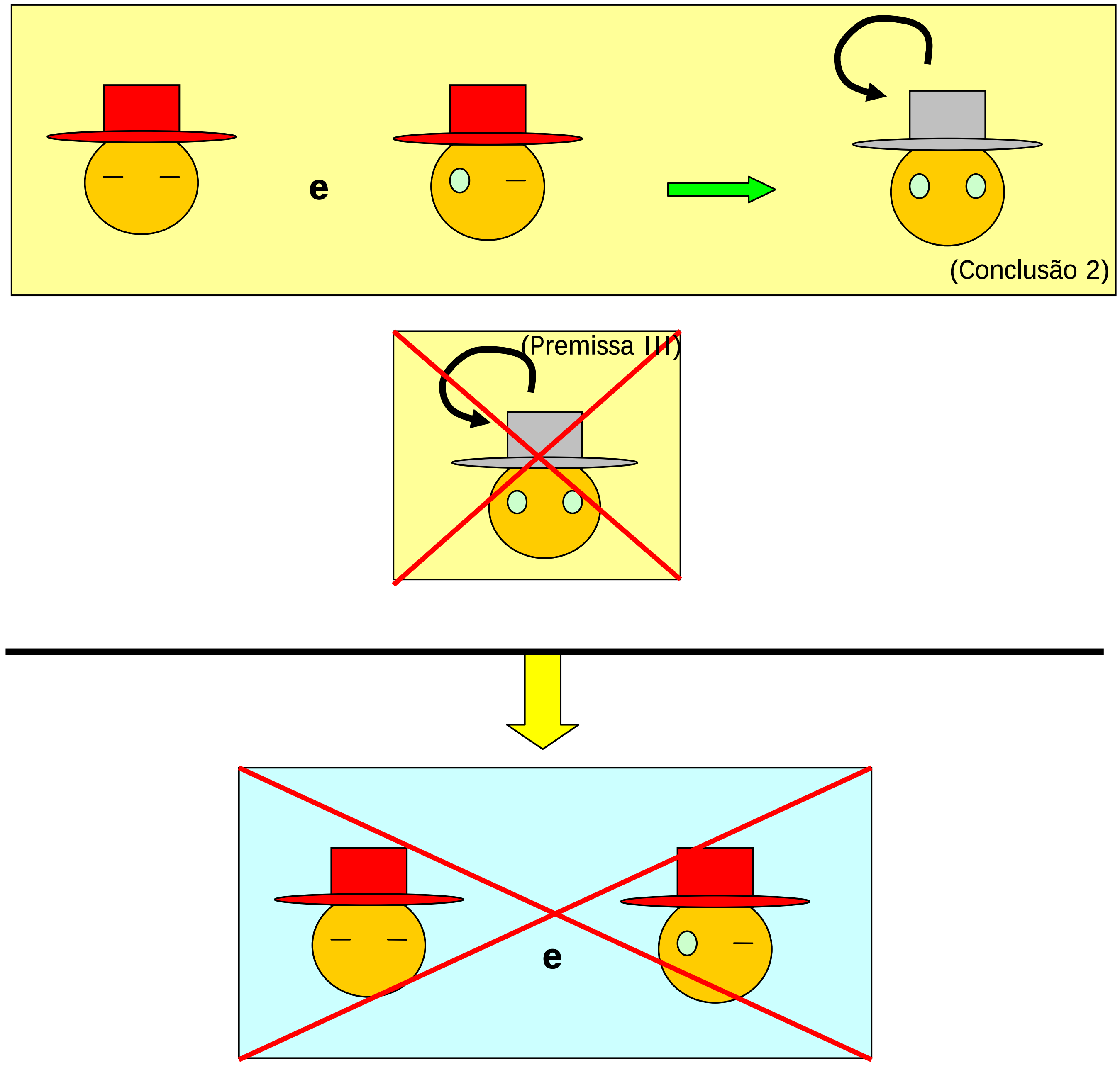
Argumento 2


U
X
sabe
Z
e
U
X
W
Y
U
X
W
Y
sabe
Z
(Premissa VI)
e
(Conclusão 1)
(Premissa II)
e

Argumento 2

4.	$\forall u \forall w \forall x \forall y \forall z\,((\mathrm{Sabe}(z, x) \wedge (\mathrm{Cor}(x, u) \rightarrow \mathrm{Cor}(y, w))) \rightarrow (\mathrm{Cor}(x, u) \rightarrow \mathrm{Sabe}(z, y)))$	(Premissa VI)
5.	$(\mathrm{Cor}(ce, ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca, ve)) \rightarrow \mathrm{Cor}(no, az))$	(Conseq. de A1)
6.	$\mathrm{Sabe}(no, \mathrm{ce}) \wedge \mathrm{Sabe}(no, \mathrm{ca})$	(Premissa II)
7.	$(\mathrm{Cor}(ce, ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca, ve)) \rightarrow \mathrm{Sabe}(no, no))$	(Conseqüência)

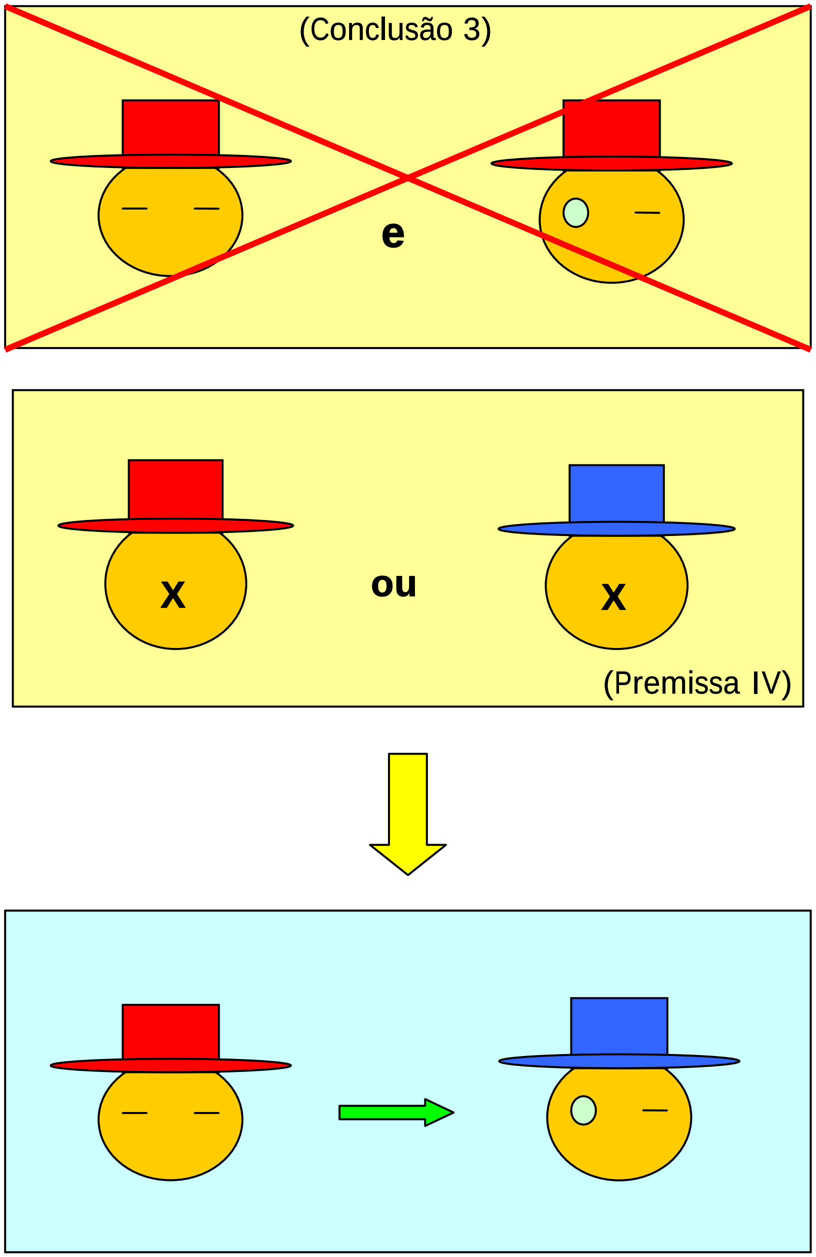
Argumento 3



Argumento 3

8.	$(\text{Cor}(ce, ve) \land \text{Cor}(ca, ve)) \to \text{Sabe}(no, no))$	(Conseq. de A2)
9.	$\neg\text{Sabe}(no, no)$	(Premissa III.a)
10.	$\neg(\text{Cor}(ce, ve) \land \text{Cor}(ca, ve))$	(Conseqüência)

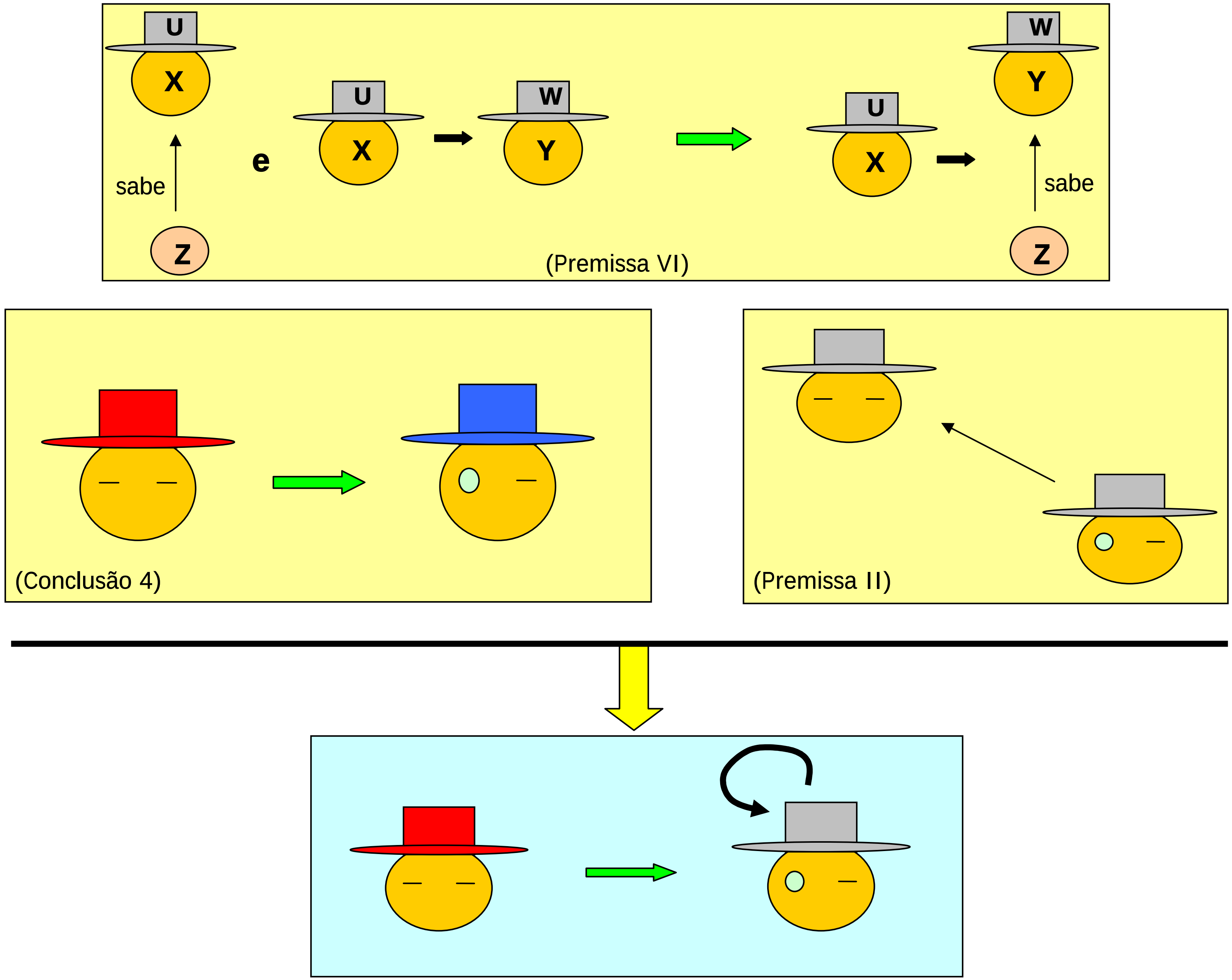
Argumento 4



Argumento 4

11.	$\neg(\mathrm{Cor}(ce, ve) \land \mathrm{Cor}(ca, ve))$	(Conseq. de A3)
12.	$\forall x(\mathrm{Cor}(x, ve) \lor \mathrm{Cor}(x, az))$	(Premissa IV)
13.	$\mathrm{Cor}(ce, ve) \to \mathrm{Cor}(ca, az)$	(Conseqüência)

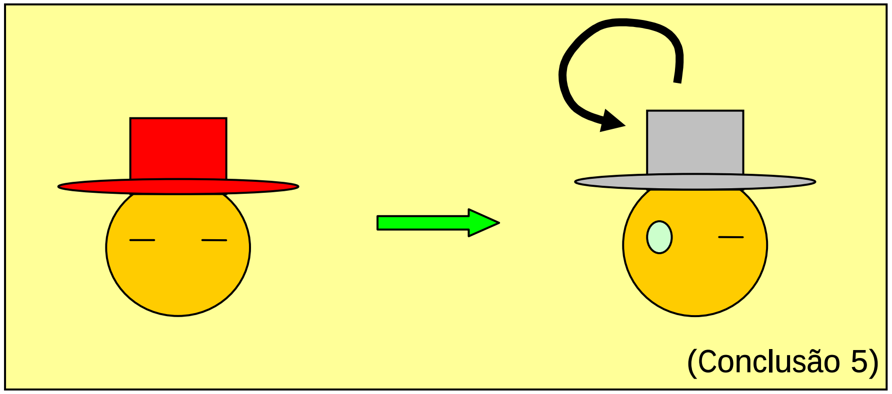
Argumento 5

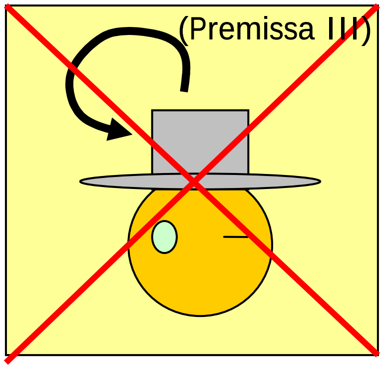

U
X
Z
sabe
e
U
X
W
Y
U
X
W
Y
sabe
Z
(Premissa VI)
(Conclusão 4)
(Premissa II)

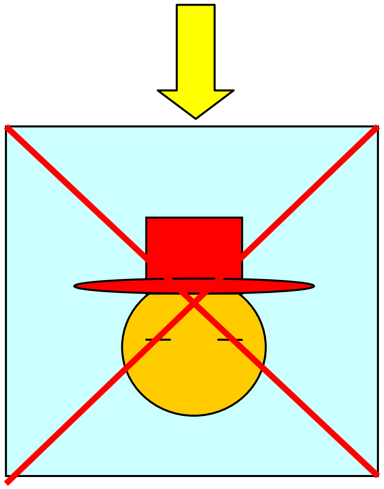
Argumento 5

14.	$\forall u \forall w \forall x \forall y \forall z\, ((\text{Sabe}(z, x) \wedge (\text{Cor}(x, u) \rightarrow \text{Cor}(y, w))) \rightarrow (\text{Cor}(x, u) \rightarrow \text{Sabe}(z, y)))$	(Premissa VI)
15.	$\text{Cor}(ce, ve) \rightarrow \text{Cor}(ca, az)$	(Conseq. de A4)
16.	$\text{Sabe}(ca, ce)$	(Premissa II)
17.	$\text{Cor}(ce, ve) \rightarrow \text{Sabe}(ca, ca)$	(Conseqüência)

Argumento 6



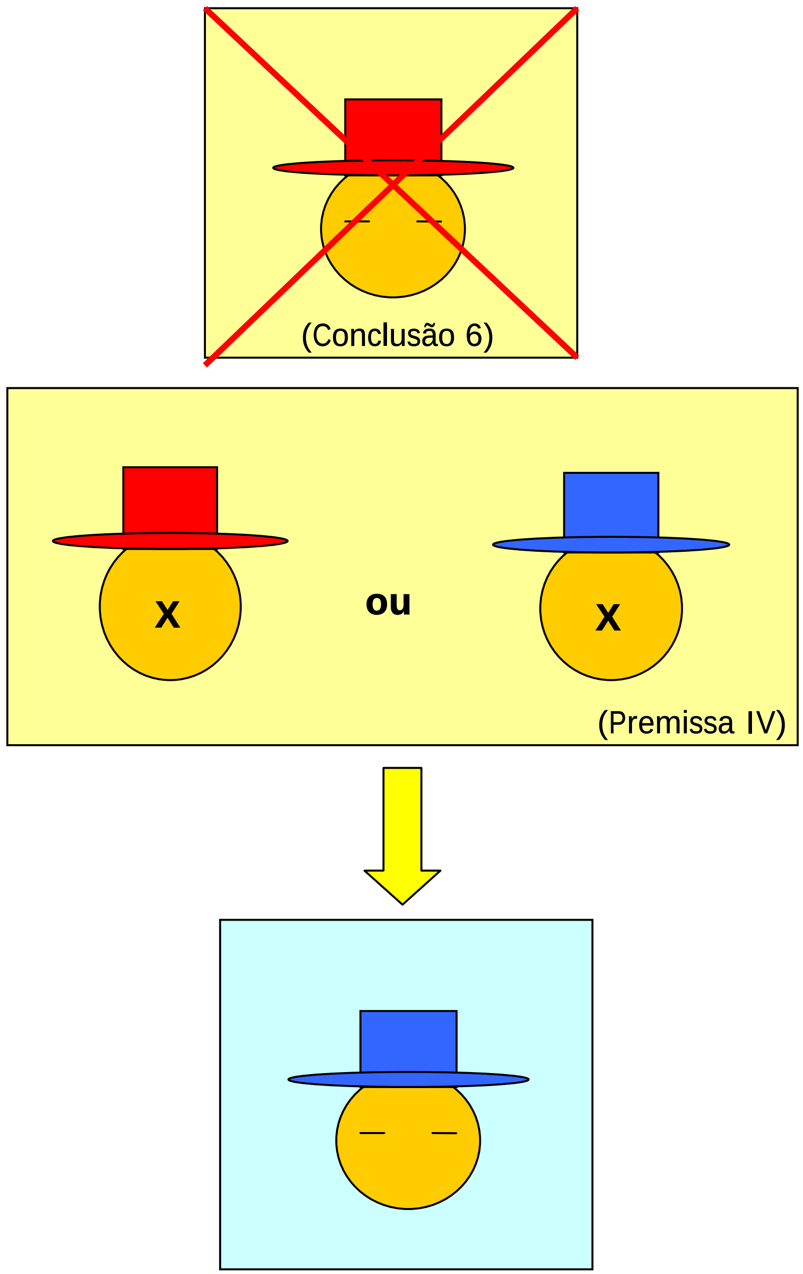




Argumento 6

18.	$\mathrm{Cor}(ce,\ ve) \rightarrow \mathrm{Sabe}(ca,\ ca)$	(Conseq. de A5)
19.	$\neg\mathrm{Sabe}(ca,\ ca)$	(Premissa III.b)
20.	$\neg\mathrm{Cor}(ce,\ ve)$	(Conseqüência)

Argumento 7



Argumento 7

20.	$\forall x(\text{Cor}(x, \textit{ve}) \lor \text{Cor}(x, \textit{az}))$	(Premissa IV)
21.	$\neg\text{Cor}(\text{ce}, \textit{ve})$	(Conseq. de A6)
22.	$\text{Cor}(\text{ce}, \textit{az})$	(Conseqüência)

Prova – o chapéu do cego é azul

1.	$\forall x \forall y \forall z((x \neq y \wedge z \neq x \wedge z \neq y \wedge \mathrm{Cor}(x, ve) \wedge \mathrm{Cor}(y, ve)) \rightarrow \mathrm{Cor}(z, az))$	**(P5)**
2.	$ce \neq ca \wedge no \neq ce \wedge no \neq ca$	**(P1)**
3.	$\forall u \forall w \forall x \forall y \forall z\, ((\mathrm{Sabe}(z, x) \wedge (\mathrm{Cor}(x, u) \rightarrow \mathrm{Cor}(y, w))) \rightarrow (\mathrm{Cor}(x, u) \rightarrow \mathrm{Sabe}(z, y)))$	**(P6)**
4.	$\mathrm{Sabe}(no, \mathrm{ce}) \wedge \mathrm{Sabe}(no, \mathrm{ca}) \wedge \mathrm{Sabe}(ca, \mathrm{ce})$	**(P2)**
5.	$\neg\mathrm{Sabe}(no, no) \wedge \neg\mathrm{Sabe}(ca, ca)$	**(P3)**
6.	$\forall x(\mathrm{Cor}(x, ve) \vee \mathrm{Cor}(x, az))$	**(P4)**
7.	$(\mathrm{Cor}(ce, ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca, ve)) \rightarrow \mathrm{Cor}(no, az))$	**A1 - (De 1 e 2)**
8.	$(\mathrm{Cor}(ce, ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca, ve)) \rightarrow \mathrm{Sabe}(no, no))$	**A2 - (De 3, 4 e 7)**
9.	$\neg(\mathrm{Cor}(ce, ve) \wedge \mathrm{Cor}(ca, ve))$	**A3 - (De 5 e 8)**
10.	$\mathrm{Cor}(ce, ve) \rightarrow \mathrm{Cor}(ca, az)$	**A4 - (De 6 e 9)**
11.	$\mathrm{Cor}(ce, ve) \rightarrow \mathrm{Sabe}(ca, ca)$	**A5 - (De 3, 4 e 10)**
12.	$\neg\mathrm{Cor}(ce, ve)$	**A6 - (De 5 e 11)**
13.	$\mathrm{Cor}(\mathrm{ce}, az)$	**A7 - (De 6 e 12)**

Questão:

Qual deve ser a principal característica de cada argumento para que tenhamos certeza absoluta de que o chapéu do cego é mesmo azul?

Em outras palavras...

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ P_2 \\ : \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

Se **Q** é <u>*conseqüência lógica*</u> de $\mathbf{P_1,\ldots, P_n}$, então de que forma a verdade de **Q** deve se relacionar com a verdade de $\mathbf{P_1,\ldots, P_n}$ para que possamos ter confiança absoluta nos argumentos (justificativas) lógicos?

Resposta:

P_1

P_2

:

P_n

Q

Um argumento é *logicamente válido* (absolutamente confiável) quando não é possível que **Q** seja falsa quando $\mathbf{P_1}$,…, $\mathbf{P_n}$ são todas verdadeiras.

Sempre que $\mathbf{P_1}$,…, $\mathbf{P_n}$ são todas verdadeiras, **Q** também é.

Quando...

$$\begin{array}{|l} P_1 \\ P_2 \\ : \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

é um argumento logicamente válido, dizemos que **Q** é *<u>conseqüência lógica</u>* de $\mathbf{P_1},\ldots,\ \mathbf{P_n}$.

<u>Ou seja</u>: **Q** é conseqüência lógica de $\mathbf{P_1},\ldots,\ \mathbf{P_n}$ se não é possível que **Q** seja falsa quando $\mathbf{P_1},\ldots,\ \mathbf{P_n}$ são todas verdadeiras.

A principal característica de um argumento logicamente válido (absolutamente confiável) é a <u>**preservação da verdade**</u> das premissas para a conclusão.

→ <u>Premissas verdadeiras levam a conclusão verdadeira.</u>

Cada um dos argumentos A1 – A7 anteriores é um argumento logicamente válido em que a conclusão é conseqüência lógica das premissas.

Para cada um destes argumentos existe uma justificativa lógica aceitável que garante a preservação da verdade.

LÓGICA

É o estudo sistemático, geral e formal das relações de conseqüência que podem ser expressas em linguagem.

É tarefa da Lógica

- Descrever as situações mais gerais em que uma sentença é conseqüência lógica de um conjunto de sentenças.
- Compreender os aspectos formais e lingüísticos da preservação de verdade.
- Fornecer justificativa para a validade de argumentos.
- Fornecer ferramentas para a obtenção (e verificação) das conseqüências de um conjunto de sentenças. (→ as regras de inferência)

Não é tarefa da Lógica

- Descrever a maneira como nós pensamos.
  - As leis da lógica não são leis do pensamento, são apenas justificativas aceitáveis para a preservação de verdade.
- Averiguar a verdade ou falsidade das premissas de um argumento.
  - A lógica se ocupa apenas com relações entre sentenças e com como estas relações preservam ou não a verdade.
- A lógica é uma disciplina **analítica**.
  - Ela não tem nada de novo a dizer sobre os fenômenos. Ela apenas estuda os relacionamentos lingüísticos que associamos aos fenômenos.

Argumento 1 – Prova

1.	$\forall x \forall y \forall z((x \neq y \land z \neq x \land z \neq y \land Cor(x,ve) \land Cor(y,ve)) \to Cor(z,az))$	**(P5)**
2.	$ce \neq ca \land no \neq ce \land no \neq ca$	**(P1)**
3.	$(ce \neq ca \land no \neq ce \land no \neq ca \land Cor(ce,ve) \land Cor(ca,ve)) \to Cor(no,az)$	**($\forall$Elim 1)**
4.	$Cor(ce,ve) \land Cor(ca,ve)$	**(Hip.)**
5.	$ce \neq ca \land no \neq ce \land no \neq ca \land Cor(ce,ve) \land Cor(ca,ve)$	**($\land$Intro 2,4)**
6.	$Cor(no,az)$	**($\to$Elim 3,5)**
7.	$(Cor(ce, ve) \land Cor(ca, ve)) \to Cor(no, az)$	**($\to$Intro 4,6)**

Argumento 2 – Prova

1.	$\forall u \forall w\ \forall x \forall y \forall z\ ((Sabe(z, x) \wedge (Cor(x, u) \rightarrow Cor(y, w))) \rightarrow (Cor(x, u) \rightarrow Sabe(z, y)))$	**(P6)**
2.	$(Cor(ce, ve) \wedge Cor(ca, ve)) \rightarrow Cor(no, az))$	**(A1)**
3.	$Sabe(no, ce) \wedge Sabe(no, ca) \wedge Sabe(ca, ce)$	**(P2)**
4.	$(Sabe(no, ce) \wedge (Cor(ce, ve) \rightarrow Cor(no, az))) \rightarrow (Cor(ce, ve) \rightarrow Sabe(no, no))$	**(∀Elim 1)**
5.	$Sabe(no, ce)$	**(∧Elim 3)**
6.	$Cor(ce, ve) \wedge Cor(ca, ve)$	**(Hip)**
7.	$Cor(ce, ve)$	**(∧Elim 6)**
8.	$Cor(ce, ve)$	**(Hip)**
9.	$Cor(no, az)$	**(→Elim 2,6)**
10.	$Cor(ce, ve) \rightarrow Cor(no, az)$	**(→Intro 8-9)**
11.	$Sabe(no, ce) \wedge (Cor(ce, ve) \rightarrow Cor(no, az))$	**(∧Intro 5,10)**
12.	$Cor(ce, ve) \rightarrow Sabe(no, no)$	**(→Elim 4,11)**
13.	$Sabe(no, no)$	**(→Elim 12,7)**
14.	$(Cor(ce, ve) \wedge Cor(ca, ve)) \rightarrow Sabe(no, no)$	**(→Intro 6-13)**

Argumento 3 – Prova

1.	$(Cor(ce, ve) \land Cor(ca, ve)) \rightarrow Sabe(no, no)$	**(A2)**
2.	$\neg Sabe(no, no) \land \neg Sabe(ca, ca)$	**(P3)**
3.	$\neg Sabe(no, no)$	**($\land$Elim 2)**
4.	$Cor(ce, ve) \land Cor(ca, ve)$	**(Hip)**
5.	$Sabe(no, no)$	**($\rightarrow$Elim 1,4)**
6.	$\perp$	**($\perp$Intro 3,5)**
7.	$\neg(Cor(ce, ve) \land Cor(ca, ve))$	**($\neg$Intro 4-6)**

Argumento 4 – Prova

1.	$\neg(\mathrm{Cor}(ce, ve) \land \mathrm{Cor}(ca, ve))$	**(A3)**
2.	$\forall x(\mathrm{Cor}(x, ve) \lor \mathrm{Cor}(x, az))$	**(P4)**
3.	$\mathrm{Cor}(ca, ve) \lor \mathrm{Cor}(ca, az)$	**($\forall$Elim 2)**
4.	$\mathrm{Cor}(ce, ve)$	**(Hip.)**
5.	$\mathrm{Cor}(ca, ve)$	**(Hip.)**
6.	$\mathrm{Cor}(ce, ve) \land \mathrm{Cor}(ca, ve)$	**($\land$Intro 4,5)**
7.	$\perp$	**($\perp$Intro 6,1)**
8.	$\neg\mathrm{Cor}(ca, ve)$	**($\neg$Intro 5-7)**
9.	$\mathrm{Cor}(ca, ve)$	**(Hip.)**
10.	$\perp$	**($\perp$Intro 9,8)**
11.	$\mathrm{Cor}(ca, az)$	**($\perp$Elim 10)**
12.	$\mathrm{Cor}(ca, az)$	**(Hip.)**
13.	$\mathrm{Cor}(ca, az)$	**(Reit 12)**
14.	$\mathrm{Cor}(ca, az)$	**($\lor$Elim 3, 9-11, 12-13)**
15.	$\mathrm{Cor}(ce, ve) \to \mathrm{Cor}(ca, az)$	**($\to$Intro 4,14)**

Argumento 5 – Prova

1.	$\forall u \forall w\ \forall x \forall y \forall z\ ((Sabe(z, x) \wedge (Cor(x, u) \rightarrow Cor(y, w))) \rightarrow (Cor(x, u) \rightarrow Sabe(z, y)))$	**(P6)**
2.	$Cor(ce, ve) \rightarrow Cor(ca, az)$	**(A4)**
3.	$Sabe(no, ce) \wedge Sabe(no, ca) \wedge Sabe(ca, ce)$	**(P2)**
4.	$(Sabe(ca, ce) \wedge (Cor(ce, ve) \wedge Cor(ca, az))) \rightarrow (Cor(ce, ve) \rightarrow Sabe(ca, ca))$	**(∀Elim 1)**
5.	$Sabe(ca, ce)$	**(∧Elim 3)**
6.	$Sabe(ca, ce) \wedge (Cor(ce, ve) \rightarrow Cor(ca, az))$	**(∧Intro 5,2)**
7.	$Cor(ce, ve) \rightarrow Sabe(ca, ca)$	**(→Elim 4,6)**

Argumento 6 – Prova

1.	$Cor(ce, ve) \to Sabe(ca, ca)$	**(A5)**
2.	$\neg Sabe(no, no) \wedge \neg Sabe(ca, ca)$	**(P3)**
3.	$\neg Sabe(ca, ca)$	**($\wedge$Elim 2)**
4.	$Cor(ce, ve)$	**(Hip.)**
5.	$Sabe(ca, ca)$	**($\to$Elim 1,4)**
6.	$\perp$	**($\perp$Intro 5,3)**
7.	$\neg Cor(ce, ve)$	**($\neg$Intro 4-6)**

Argumento 7 – Prova

1.	$\forall x(Cor(x, ve) \vee Cor(x, az))$	(P4)
2.	$\neg Cor(ce, ve)$	(A6)
3.	$Cor(ce, ve) \vee Cor(ce, az)$	($\forall$Elim 1)
4.	$Cor(ce, ve)$	(Hip)
5.	$\perp$	($\perp$Intro 4,2)
6.	$Cor(ce, az)$	($\perp$Elim 5)
7.	$Cor(ce, az)$	(Hip)
8.	$Cor(ce, az)$	(Reit 7)
9.	$Cor(ce, az)$	($\vee$Elim 3, 4-6, 7-8)