WORKSHOP - Aspectos Lógicos da Negação

O Projeto
Simulações Positivas da Negação

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves

Departamento de Filosofia - DFIL
Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes – CCHLA
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

durante@ufrnet.br

Questões Motivadoras

- Seria possível produzir sistemas formais de lógica sem a utilização de nenhum símbolo primitivo para o tratamento da negação?
- Seria possível simular a negação através de operadores *positivos*?
- Quão próximos dos sistemas mais conhecidos de lógica clássica, intuicionista, minimal, paraconsistente ou relevante estes sistemas sem negação conseguiriam chegar?
- Teriam estes sistemas sem negação alguma vantagem computacional, construtiva ou mesmo teórica, de fundamentação filosófica, com relação aos sistemas tradicionais com negação?
- Quais as suas eventuais desvantagens?

Objetivos

- Compreender a negação através da análise dos efeitos de sua ausência nos sistemas lógicos.
- Buscar suprir ou minorar estes efeitos através de uma simulação da negação por meio de artifícios formais supostamente positivos.
- Averiguar qüão de fato positivas são as simulações propostas.
- Comparar nossos resultados com outras abordagens.

PROPOSTA - Negação como Implicação

- Nos sistemas de Dedução Natural à lá Prawitz a negação é definida como:

$$\boxed{\neg \mathbf{A} =_{df} \mathbf{A} \rightarrow \perp}$$

- Propomos abandonar o "⊥" e definir a negação simplesmente como:

$$\boxed{\neg \mathbf{A} =_{df} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}$$

Negação como Implicação - MOTIVAÇÃO

- O significado intuicionista de "⊥" é dado pela regra:

$$\bot_I: \quad \frac{\bot}{B}$$

- Ou seja, "⊥" é um símbolo trivializador e portanto o significado intuicionista de "$\mathbf{A} \rightarrow \bot$" (não-**A**) é:

De **A** tudo se segue

Negação como Implicação - MOTIVAÇÃO

- Encarado como um **esquema de fórmulas**, “**A** $\rightarrow$ **B**” é um esquema trivializador de “**A**”,
  - pois sendo “**B**” um esquema, pode ser substituído por qualquer fórmula.
- Então, em um certo sentido, “**A** $\rightarrow$ **B**” também significa que:

De **A** tudo se segue

Negação como Implicação - RESTRIÇÕES

- Claro que esta motivação para a definição ($\neg \mathbf{A} =_{df} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$) não resolve nossos problemas, afinal é bastante sabido que:

- **Na Lógica Clássica:**

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

- **Na Lógica Intuicionista:**

Não há interdefinibilidade de conectivos

Nome	Tautologias Clássicas	Traduções Positivas (tautologias)
Terceiro excluído	$A \vee \neg A$	$A \vee (A \to F)$
Lei de Clávius	$(\neg A \to A) \to A$	$((A \to F) \to A) \to A$
DeMorgan Conjun ($\Rightarrow$)	$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$	$((A \wedge B) \to F) \to ((A \to F) \vee (B \to F))$
Introd. da dupla negação	$A \to \neg\neg A$	$A \to ((A \to F) \to F)$
Não-contradição	$\neg(A \wedge \neg A)$	$(A \wedge (A \to F)) \to F$
DeMorgan Conjun ($\Leftarrow$)	$(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$	$((A \to F) \vee (B \to F)) \to ((A \wedge B) \to F)$
DeMorgan Disjunção	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	$((A \vee B) \to F) \leftrightarrow ((A \to F) \wedge (B \to F))$
Contrapositiva ($\Rightarrow$)	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$(A \to B) \to ((B \to F) \to (A \to F))$

	teoremas clássicos, mas não intuicionistas
	esquerda – teoremas minimais; **direita** – teoremas positivos

Nome	Tautologias Clássicas	Trad. Positivas (não-tautologias)
Princípio da Explosão	$(A \wedge \neg A) \to B$	$(A \wedge (A \to F)) \to B$
Lei de Duns Scotus	$\neg A \to (A \to B)$	$(A \to F) \to (A \to B)$
Silogismo Disjuntivo	$((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$	$((A \vee B) \wedge (A \to F)) \to B$
Elim. da dupla negação	$\neg\neg A \to A$	$((A \to F) \to F) \to A$
Contrapositiva ($\Leftarrow$)	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	$((B \to F) \to (A \to F)) \to (A \to B)$
Antilogismo ($\Leftarrow$)	$((A \wedge \neg C) \to \neg B) \to ((A \wedge B) \to C)$	$((A \wedge (C \to F)) \to (B \to F)) \to ((A \wedge B) \to C)$
DeMorgan Conj. com Introd da dupla negação ($\Leftarrow$)	$\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$	$(((A \to F) \vee (B \to F)) \to F) \to (A \wedge B)$

	esquerda – teoremas intuicionistas, mas não minimais
	esquerda – teoremas clássicos, mas não intuicionistas

Questão 1

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que obtemos aplicando a definição positiva da negação à lógica positiva?

$$\Gamma \vdash_{?} B \iff \Gamma^{+} \vdash_{+} B^{+}$$

Questão 1

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que obtemos aplicando a definição positiva da negação à lógica positiva?

$$\Gamma \vdash_{?} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+} B^{+}$$

- **RESPOSTA**: a lógica intuicionista minimal.

$$\Gamma \vdash_{M} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+} B^{+}$$

Questão 2

- **PERGUNTA:** Qual o sistema formal de lógica que prova todas as traduções positivas de tautologias clássicas que continuam tautologias clássicas?

Questão 2

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que prova todas as traduções positivas de tautologias clássicas que continuam tautologias clássicas?

- **RESPOSTA**: O fragmento positivo da lógica clássica (Pos + Peirce)

$$\frac{\begin{array}{c}[A \rightarrow F] \\ A\end{array}}{A}$$

SELDIN, J. "Normalization and excluded middle". Studia Logica, v. 48, p. 193-217, 1989.

Questão 3

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que obtemos aplicando a definição positiva da negação ao fragmento positivo da lógica clássica?

$$\boxed{\Gamma \vdash_{?} B \Leftrightarrow \Gamma^{+} \vdash_{+P} B^{+}}$$

Questão 3

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que obtemos aplicando a definição positiva da negação ao fragmento positivo da lógica clássica?

$$\Gamma \vdash_{?} B \Leftrightarrow \Gamma^{+} \vdash_{+P} B^{+}$$

- **RESPOSTA**: Não sei. ☹

Questão 3

- **PERGUNTA**: Qual o sistema formal de lógica que obtemos aplicando a definição positiva da negação ao fragmento positivo da lógica clássica?

$$\Gamma \vdash_{?} B \iff \Gamma^{+} \vdash_{+P} B^{+}$$

- **RESPOSTA**: Não sei. ☹

- (**Agora sei!** ☺ É o Sistema **K:** regras positivas + Peirce + bottop !!)

Questão 3 - Continuação

- Não é a lógica clássica.

$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

- Não é a lógica intuicionista nem nenhuma intermediária.

$A \vee \neg A$	$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$

- Não é a lógica paraconsistente C1.

$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg\neg A \rightarrow A$

Questão 4

- **<u>PERGUNTA</u>:** Há algum modo de estender a lógica positiva de modo a que aplicando-lhe a definição positiva da negação o resultado seja a lógica intuicionista?

$$\Gamma \vdash_{I} B \Leftrightarrow \Gamma^{+} \vdash_{+?} B^{+}$$

Questão 4

- **PERGUNTA**: Há algum modo de estender a lógica positiva de modo a que aplicando-lhe a definição positiva da negação o resultado seja a lógica intuicionista?

$$\Gamma \vdash_{I} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+?} B^{+}$$

- **RESPOSTA**: Há. Regra **T**riv - Trivialização Restrita:

$$\frac{F}{B}$$

RESTRIÇÃO: nas hipóteses das quais **B** depende qualquer ocorrência de **F** deve ser conseqüência de condicional.

Questão 5

- **<u>PERGUNTA</u>:** Há algum modo de estender a lógica positiva de modo a que aplicando-lhe a definição positiva da negação o resultado seja a lógica clássica?

$$\Gamma \vdash_{c} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+?} B^{+}$$

Questão 5

- **PERGUNTA**: Há algum modo de estender a lógica positiva de modo a que aplicando-lhe a definição positiva da negação o resultado seja a lógica clássica?

$$\Gamma \vdash_{c} B \Leftrightarrow \Gamma^{+} \vdash_{+?} B^{+}$$

- **RESPOSTA**: Há. Regra **E**DI - Eliminação da Dupla Implicação:

$$\frac{\begin{array}{c}[A \rightarrow F] \\ F\end{array}}{A}$$

RESTRIÇÃO: nas hipóteses das quais **B** depende qualquer ocorrência de **F** deve ser conseqüência de condicional.

Outras Questões Importantes

- Distinguir implicação legítima de negação.
- Classificar os diferentes sistemas em graus de positividade.
- Averiguar outras definições positivas para a negação.
- Estudar a proposta de autores que modificaram a implicação intuicionista objetivando obter uma matemática de fato sem negação:

Entender a Abordagem de

GRISS, G. F. C. ‘Negationless Intuitionistic Mathematics’, *Indagationes Mathematicae* **8**, 675–681, 1946.

GILMORE, P. C. G. ‘“Griss” Criticism of the Intuitionistic Logic and the Theory of Order’. In: *Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy, August 20–26, 1953, Brussels*, North-Holland, Amsterdam, pp. 98–104, 1953a.

KRIVTSOV, V. N. ‘A NEGATIONLESS INTERPRETATION OF INTUITIONISTIC THEORIES’. *ERKENNTNIS* **53**, 155–172, 2000.

MINTS, G. “Notes on Constructive Negation”. *Synthese*, **148**, 701–717, 2006.

NELSON, D. ‘A Complete Negationless System’, *Studia Logica* **32**, 41–49, 1973.

VREDENDUIN, P. C. J. ‘The Logic of Negationless Mathematics’, *Compositio Mathematica* **11**, 204–277, 1953.

Resumindo

$$\neg \mathbf{A} =_{df} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$$

$$\Gamma \vdash_{M} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+} B^{+}$$

$$\Gamma \vdash_{I} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+T} B^{+}$$

$$\Gamma \vdash_{C} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+E} B^{+}$$

$$\Gamma \vdash_{?} B \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{+} \vdash_{+P} B^{+}$$

(*P*) *Peirce:* $\dfrac{\begin{matrix}[A \rightarrow F]\\ A\end{matrix}}{A}$	**(*T*)** *Triv:* $\dfrac{F}{B}$	**(*E*)** *EDI:* $\dfrac{\begin{matrix}[A \rightarrow F]\\ F\end{matrix}}{A}$