Hudson dos Anjos Benevides

Seria a identidade uma constante lógica? Entre Lógica e Metafísica

Brasil

2017

Hudson dos Anjos Benevides

Seria a identidade uma constante lógica? Entre Lógica e Metafísica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes

Programa de Pós-Graduação em Filosofia – PPGFil

Orientador: Daniel Durante Pereira Alves

Brasil

2017

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes - CCHLA

Benevides, Hudson dos Anjos.
Seria a identidade uma constante lógica? Entre lógica e metafísica / Hudson dos Anjos Benevides. - 2017.
84f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes. Programa de Pós-Graduação em Filosofia, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves.

1. Constantes lógicas. 2. Identidade. 3. Regras de Inferência. I. Alves, Daniel Durante Pereira. II. Título.

RN/UF/BS-CCHLA CDU 16

Hudson dos Anjos Benevides

Seria a identidade uma constante lógica?
Entre Lógica e Metafísica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Trabalho aprovado. Brasil, Natal, 31 de Janeiro de 2017:

Daniel Durante Pereira Alves
UFRN – Orientador

Prof. Dr. Samir Bezerra Gorsky
UFRN – Membro Interno

Prof. Dr. Guido Imaguire
UFRJ – Membro Externo

Brasil
2017

Às minhas mães, por todo o amor.

Agradecimentos

Agradeço a Daniel Durante por aceitar de bom grado orientar este trabalho e pelas inúmeras e proveitosas discussões filosóficas que tivemos. Suas observações foram de grande importância para a qualidade desta dissertação.

Agradeço à professora Maria da Paz, ao professor Guido Imaguire e ao professor Samir Gorsky por suas observações as versões preliminares deste trabalho.

Aos professores que contribuíram e têm contribuido para o meu desenvolvimento pessoal e intelectual. Em especial, agradeço a João Marcos por todo encorajamento.

À minha mãe Francisca e minha irmã(e) Silvia Letícia, pelo incondicional apoio, mesmo quando isso envolveu deixar o nosso lar, e por representarem a única coisa que respeito como divino neste mundo.

A meu pai por me ensinar que a simplicidade é a mãe de toda a felicidade.

A André Pontes agradeço todo o apoio. O NULFA e os primeiros textos de iniciação científica certamente foram passos fundamentais na minha formação. E mais importante que isso, sou grato pela amizade.

Aos amigos da base (709) de lógica da UFRN, David Gomes, Evelyn Erickson, João Daniel, Sanderson Molick, Patrick Terrematte e Thiago Nascimento pelas tardes de discussão lógico-filosóficas regadas a café.

À Débora Kalline pela paciência e carinho sem os quais eu não teria superado os momentos mais críticos na finalização deste trabalho.

À Capes por apoiar financeiramente o desenvolvimento deste trabalho.

A realidade sempre é
mais ou menos do que nós
queremos. Só nós somos sempre
iguais a nós-próprios.
– Ricardo Reis

Resumo

O que chamamos de problema das constantes lógicas é uma tentativa de oferecer um critério não-arbitrário para distinguir o reino das expressões lógicas das não lógicas. Tradicionalmente, as expressões que constituem o vocabulário lógico foram vistas como responsáveis pela validade dos argumentos. Nessa tradição negação ($\sim$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$), os quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$) foram considerados membros do conjunto privilegiado das constantes lógicas. Mas há ampla disputa sobre quais outras expressões deveriam ser inclusas nessa lista. Nosso objetivo é investigar um desses casos, a saber, as disputas sobre a logicidade da identidade. Observamos que nessa disputa os argumentos são essencialmente construídos numa interpretação representacionalista da identidade. Sendo assim, argumentamos que se abandonarmos esse pressuposto é possível vislumbrar uma linha de argumentação em defesa da identidade. Para fazer isso, abordamos o problema a partir das assim chamadas 'caracterizações inferenciais'. Nessa abordagem as regras de inferência são usadas para expor o comportamento lógico das constantes lógicas. Assim, usaremos algumas das exigências dos representantes dessa abordagem para alcançar nosso objetivo. Em particular, seguiremos Popper (1946), e Došen (1989). Usamos algumas de suas ideias, juntamente com algumas de Humberstone e Townsend (1994), para mostrar em quais condições forneceríamos uma resposta adequada ao problema da identidade enquanto constante lógica.

Palavras-chave: constantes lógicas. identidade. regras de inferência.

Abstract

What we call the problem of logical constants is an attempt to afford a non-arbitrary criteria to distinguish the realm of logical expressions from non-logical ones. Traditionally the expressions which constitutes the logical vocabulary were viewed as responsible for the validity of arguments. In this tradition negation ($\sim$), conjunction ($\wedge$), disjunction ($\vee$), implication ($\rightarrow$), the universal ($\forall$) and existential ($\exists$) quantifiers were considered members of the privileged set of logical constants. But there is a large dispute about which others expressions should be introduced in this list. Our goal is to investigate one of these cases, namely, the disputes about the logicality of identity ($=$). We note that in disputes about identity the arguments are mainly couched in a representationalist way. Then, we argue that if we give up this assumption it is possible to defend the logicality of identity. To do that we approach the problem trough the so called inferential characterizations. In such an approach rules of inference are used to expose the logical behavior of a logical constant. In particular, we will follow Popper (1946), and Došen (1989). We use his ideas jointly with some of Humberstone e Townsend (1994) to expose in which conditions we could give an adequate answer to the problem of identity as a logical constant.

Keywords: logical constants. identity. rules of inference.

Sumário

Introdução

Quase todo livro texto de introdução à lógica contém a afirmação de que a Lógica é a disciplina preocupada com argumentos válidos em virtude da forma, sendo os argumentos formalmente válidos aqueles cuja a validade depende do significado das *constantes lógicas*. Dentre os casos paradigmáticos de argumentos formalmente válidos estão os silogismos aristotélicos, como a seguinte instância do silogismo *barbara* atesta.

(b_{arb}) Todos escafandrista é mergulhador.
Todo mergulhador é corajoso.
Logo, todo escafandrista é corajoso.

Que a *forma lógica* é suficiente para a validade do argumento se torna evidente quando se nota que 'escafandrista', 'mergulhador' e 'corajoso' são termos que podem variar sem a perda da validade do argumento. Substituindo estes conceitos por letras esquemáticas obtemos o seguinte argumento-esquema.

(b_{arb*}) Todo A é B.
Todo B é C.
Logo, todo A é C.

Qualquer instância desse argumento-esquema que interprete uniformemente as letras esquemáticas A, B, C nos retornará uma argumento válido. Sendo assim, a primeira ideia que podemos formar é a de que as constantes lógicas são as partes de um argumento que, por contribuir para a sua validade, não podem variar; todo o resto constitui a matéria extra-lógica que, por sua vez, é susceptível a variação. No caso do argumento-esquema acima, 'todo', 'logo' e 'é' figuram como constantes lógicas. Por exemplo, se nos fosse permitido tomar 'Todo' como parte variável o argumento-esquema resultante, a saber,

($b_{arb'}$) Q A é B.
Q B é C.
Logo, Q A é C.

resultaria em um argumento formalmente inválido. Como exemplo, podemos interpretar Q como 'Nenhum', A como 'escafandrista', B como 'mergulhador' e C como 'corajoso' e notar que o argumento é inválido. Afinal, mesmo que não fossem mergulhadores, e que os mergulhadores não fossem corajosos, os escafandristas ainda assim poderiam ser corajosos (quem sabe em uma situação onde escafandristas são cangaceiros).

Com vistas a executar a tarefa a que a Lógica se propõe, linguagens formais são propostas como cânones do raciocínio, fornecendo meios efetivos para discriminar entre argumentos válidos e inválidos. Na lógica clássica de primeira ordem, que hoje faz parte do que poderíamos chamar de ortodoxia da lógica, os operadores de negação ($\sim$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$), os quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$) tradicionalmente estiveram incluídos no seleto grupo das constantes lógicas. *Grosso modo*, eles correspondem respectivamente as expressões 'não', 'e', 'ou', 'se..., então...', 'todo' e 'existe' da linguagem natural. Entretanto, o universo de sistemas formais não se restringe à lógica clássica. Existem outras lógicas que incluem em seu vocabulário operadores não incluídos na lista acima. Sabemos de sistemas de primeira ordem que adicionam, por exemplo, a identidade ($=$), ou o símbolo ($\in$) da teoria dos conjuntos. Outro exemplo é o caso da lógica modal. Em alguns sistemas modais aléticos os operadores $\Box$ e $\Diamond$ são considerados como parte do vocabulário lógico. Em linhas gerais, eles correspondem respectivamente as expressões 'necessariamente' e 'possivelmente'. Enquanto parece haver comum acordo de que 'escafandrista', 'mergulhador' e 'corajoso' não são parte da lógica, há disputa se a identidade ($=$), o símbolo ($\in$), $\Box$ e $\Diamond$ são, de fato, constantes lógicas. Se mantivermos a ideia de que constantes lógicas são simplesmente termos cujo o significado é mantido constante, aparentemente não há problema em questão. A princípio, nada impede que possamos construir sistemas formais de modo que determinados termos da linguagem assim construída sejam considerados constantes lógicas. Mas então, termos como 'escafandrista', 'mergulhador', etc., poderiam muito bem ser considerados como parte da Lógica. Entretanto, como conciliar essa perspectiva com a constatação de que esses mesmos termos são dispensáveis para a validade do silogismo que tem nos servido de exemplo, enquanto que 'todo', por exemplo, não é? Que princípio dirige a escolha de termos que compõe o domínio da lógica? Em linhas gerais, é a isso que chamamos do problema das constantes lógicas: a tentativa de fornecer um critério que justifique a escolha entre o que conta como lógico e o que não.

Nas páginas que se seguem pretendo fornecer uma análise à tentativa de solucionar o problema das constantes lógicas com o uso de regras de inferência. Em linhas gerais, essa abordagem usa as regras de introdução e eliminação em algum formalismo dedutivo como a ferramenta para demarcar as constantes lógicas. Em particular, estarei interessado em como essa abordagem pode ajudar a resolver a disputa se a identidade ($=$) é uma constante lógica ou não.

No primeiro capítulo apresento em que consiste o problema das constantes lógicas. Em particular, apresento a disputa sobre se a identidade é ou não uma constante lógica. O item central será a alegada indispensabilidade da identidade como propuseram Frege e Dummett (1973) e que será contrastado com os argumentos de dispensabilidade como encontrados em Quine (1986), Hintikka (1956) e Wehmeier (2012). Nessa discussão, o uso de um aparato modelo-teórico acaba por sugerir uma leitura *representacionalista* tal qual definida por (PEREGRIN, 2012), no sentido de que a significatividade dos termos de uma linguagem são significativos porque denotam item extralinguísticos. De certo modo, isso acaba por internalizar um viés metafísico na presente discussão que, como pretendemos estabelecer, pode ser questionado. A pergunta que propomos é ‘Haveria alguma alternativa a uma abordagem representacionalista da lógica?’.

No segundo capítulo apresento o que compreendemos como caracterizações inferenciais.Essa é a alternativa encontrada para dar conta da pergunta que propomos no capitulo anterior. O objetivo é tentar analisar como as regras de inferência podem ser capazes de nos ajudar a delimitar o terreno das constantes lógicas e, em particular, decidir o caso da identidade. Desenvolverei uma análise crítica das perspectivas de Popper (1946), Hacking (1979) e Došen (1989).

No terceiro capítulo, proponho o esboço de um argumento em favor da identidade como constante lógica. Esse argumento é baseado em observações de Humberstone e Townsend (1994), recuperando aspectos fregeanos da identidade. A ideia básica e a de que o papel lógico da identidade tem mais a ver com uma espécie de conteúdo que atribuímos a ela do que propriamente aquilo que poderíamos chamar de sua referência. Da forma como penso, essa abordagem capta o aspecto logico e epistêmico da identidade deixando em aberto a questão acerca do estatuto metafísico da relação binária que uma coisa tem consigo mesma e com nada mais.

Pela toca do coelho

1 O Problema das Constantes Lógicas

Neste capítulo trataremos de aspectos gerais do problema das constantes lógicas. Em (1.1) estabelecemos o problema das constantes lógicas, em (1.2) apresentaremos uma breve justificativa da pertinência do problema. (1.3) apresenta o caso da identidade que é o especial interesse deste trabalho. Abaixo oferecemos uma breve descrição histórica do papel que as constantes lógicas ocuparam no desenvolvimento da lógica.

Ao longo do desenvolvimento da Lógica, as constantes lógicas têm sido consideradas responsáveis por algumas das propriedades lógicas mais centrais. Por exemplo, Bolzano se opôs a ideia de que a lógica deveria estar pautada em discussões sobre as performances cognitivas dos indivíduos. O estudo da lógica deve estar baseado nas 'proposições em si mesmas', termo usado para se referir às entidades abstratas, objetivas, que são o sentido das sentenças. A lógica é formal para Bolzano na medida em que não está preocupada com proposições específicas, mas com as regularidades semânticas que podem ser descobertas em uma classe delas. Essas propriedades são descobertas a através da aplicação de um *método substitucional* . Em linhas gerais, esse método consiste em conceber algumas das partes das proposições como 'variáveis', no sentido de serem susceptíveis a substituição, e analisar como isso afeta a verdade ou falsidade da proposição. A *analiticidade,* por exemplo, está entre as propriedades relevantes que entram no escopo da lógica.

De acordo com Bolzano, uma proposição é *analítica no sentido amplo* , se a mudança arbitrária de pelo menos um de seus componentes *não-lógicos* não altera o seu valor de verdade. A sentença 'x que é solteiro, então x é não casado' é analítica com respeito a x, visto que suas substituições admissíveis oferecem instâncias verdadeiras, como na sentenças 'Caius é solteiro, então é não casado'. Além da analiticidade no sentido amplo, Bolzano propõe a noção de analiticidade no sentido estrito. Proposições *logicamente analíticas,* ou analíticas no sentido estrito, são aquelas em que apenas *conceitos lógicos* formam as partes invariáveis das proposições e onde todas as substituições dos componentes não lógicos as tornam verdadeiras. Dentre os exemplos que Bolzano considera como casos de analiticidade estrita estão as sentença, 'A é A', 'Todo objeto ou é B ou não B'. Sobre a distinção entre tipos de analiticidade Bolzano escreve o seguinte:

> Os exemplos de proposições analíticas que introduzi aqui diferem daquelas da [alínea] no 1 em que, ao julgar a natureza analítica das primeiras, absolutamente nenhuma outra cognição além daquelas lógicas são necessárias visto que os conceitos que formam a parte inalterável nessas proposições todas pertencem à lógica. Em contraste, para julgar a verdade ou falsidade das proposições do tipo da no 1 cognições inteiramente diferentes são exigidas, pois aqui conceitos estranhos à lógica são incorpo-

> rados. É claro, essa diferença é instável, porque o domínio dos conceitos que pertencem à lógica não é delimitado de modo tão acentuado que não pudesse haver querelas sobre ele. Apesar disso, as vezes pode ser útil dar atenção a esta distinção. Assim, alguém poderia chamar as proposições do tipo da [alínea] no 2 logicamente analíticas ou analíticas em sentido estrito, em contrate, aquelas da [alínea] no 1 analíticas em sentido amplo. Bolzano (1972 apud LAPOINTE, 2011) [1]

Como sugere Lapointe (2011, pg. 68), em sua explicação sobre as proposições analíticas Bolzano estaria comprometido com as seguintes afirmações:

(i) Em proposições logicamente analíticas, todos os conceitos não lógicos são considerados arbitrariamente variáveis, isto é, apenas conceitos lógicos ocorrem 'essencialmente' nelas.

(ii) Podemos saber que proposições logicamente analíticas são analíticas em virtude do mero conhecimento lógico.

(iii) Podemos saber que proposições logicamente analíticas são verdadeiras ou falsas com base em apenas cognições lógicas, uma vez que apenas conceitos lógicos ocorrem essencialmente nelas.

(iv) A distinção entre proposições logicamente analíticas e analíticas depende da distinção entre componentes lógicos e não lógicos.

Embora a noção de 'conceitos lógicos' opere um papel de destaque na teoria bolzaniana, a investigação sobre o que motiva tal distinção não chegou a ser levada a cabo dado o seu ceticismo em relação a delimitação dos conceitos que compõem o domínio da lógica.

Outro noção central que envolve as constantes lógicas é a definição tarskiana da relação de *consequência lógica*. Intuitivamente, consequência lógica é relação que atribuímos a um argumento válido quando dizemos que sua conclusão 'se segue' das premissas. Em linhas gerais, a definição tarskiana de consequência lógica é explicada em termos de preservação de verdade sob a reinterpretação de componentes não lógicos. Parte dessa ideia é condensada na propriedade de formalidade que Tarski atribui à noção de consequência que fica expressa abaixo.

[1] *The examples of analytic propositions that I introduced here differ from those of [alinea] no 1 in that to judge the analytic nature of the former absolutely no other cognitions than logical ones are necessary since the concepts that form the unchangeable part in these proposition all belong to logic. By contrast in order to judge the truth or falsehood of the propositions of the kind of no 1 entirely different cognitions are required, for here concepts that are alien to logic are incorporated. This difference is of course unsteady, because the domain of the concepts that pertain to logic is not so sharply delineated that there could be no quarrel about it. It can nonetheless sometimes be useful to pay attention to this distinction. Thus, one could call the proposition of the kind of [alinea] no 2 logically analytic or analytic in the narrow sense, those of [alinea] no 1 by contrast analytic in the broader sense.*

> (F) Se, nas sentenças da classe K e na sentença X, as constantes – com exceção de constantes puramente lógicas – são substituídas por quaisquer outras constantes [...], e se nós denotamos a classe de sentenças assim obtidas de K por K', e a sentença obtida de X por X', então, a sentença X' tem de ser verdadeira sob a condição apenas de que todas as sentenças da classe K' sejam verdadeiras.(TARSKI, 2007, pg. 241)

Após articular sua teoria sobre a relação de consequência lógica Tarski torna explícito um dos pressupostos de sua teoria.

> Subjazendo a toda a nossa construção, está a divisão de todos os termos da linguagem discutida em lógicos e extra-lógicos – divisão que certamente não é arbitrária. Se, por exemplo, fôssemos incluir entre os sinais extralógicos o sinal de implicação, ou o quantificador universal, então, nossa definição de conceito de consequência conduziria a resultados que obviamente contradizem o uso comum. Por outro lado, não é de meu conhecimento nenhum fundamento objetivo que permita traçar uma fronteira precisa entre os dois grupos de termos. (TARSKI, 2007, pg. 245)

Além de reconhecer que sua proposta é refém da divisão entre termos lógicos e não lógicos, Tarski observa que parece haver algo que a escolha não é arbitrária. Basta relembrar o exemplo de ($\mathrm{b}_{arb'}$) apresentada na introdução, onde tomamos o termo 'todo' como não lógico.

Na literatura essa passagem é tomada com a principal formulação do problema das constantes lógicas e, desde então, tem motivado filósofos e lógicos a tentar traçar as fronteiras do reino da lógica. Ora, se as constantes lógicas são pressupostas na definição de consequência lógica, que aplicabilidade essa relação poderia ter sem uma compreensão clara do que distingue o domínio do que é lógico e do que não é?

Na literatura, por vezes, as constantes lógicas são vistas como aqueles termos cujo *significado é simplesmente mantido constante* [2] Isso pode sugerir que esses termos recebem seu tratamento especial por mera estipulação, no sentido de serem lógicos porque foram assim designados. Por vezes, o tratamento especial é justificado a partir da compreensão de que as constantes lógicas satisfazem algumas propriedades interessantes por sua própria natureza. Nesse caso, algumas propriedades lógicas são trazidas à tona como evidência da logicidade atribuída às constantes lógicas. Levando essas diferentes leituras em conta, Sagi (2013) propõe a distinção entre termos lógicos no *sentido superficial (shallow sense)* e termos lógicos no *sentido profundo (deep sense)*. No sentido superficial constantes lógicas são relativas ao sistema, enquanto que em seu sentido profundo elas devem satisfazer um critério de logicidade. É sobre esse critério que trataremos adiante

[2] Esse é, por exemplo, o modo como Warmbrod (1999) definine o problema.

1.1 O problema das constantes lógicas 'numa casca de noz'

O problema que atacaremos daqui por diante é o de fornecer um critério suficientemente informativo sobre quais expressões fazem parte do reino da lógica e quais não. Os requisitos sobre esse critério serão apresentados adiante. No nível intuitivo, a justificativa que parece guiar a escolha das constantes lógicas é a ideia que elas são as ferramentas indispensáveis para articulação de nossos raciocínios em *qualquer* âmbito. Esse pensamento sugere a *tópico-neutralidade* como critério de demarcação das constantes lógicas. Em geral, as expressões tópico-neutras são distinguidas das demais por não tratarem de um assunto específico (SAINSBURY, 2000). Por exemplo, a expressão 'azul' é sobre a qualidade de ser azul, ou ainda, sobre um determinado comprimento de onda do espectro de cores. Por outro lado, os termos 'não', 'e', 'ou', 'todo', etc., são termos pelos quais articulamos nosso raciocínio, seja em considerações do dia a dia ou mesmo nos mais diversos campos do conhecimento. Como MacFarlane (2015) ressalta, o papel das constantes é intimamente ligado à própria condição de elaboração dos raciocínios. [3] A dificuldade, entretanto, é que a tópico-neutralidade inclui no conjunto de constantes logicas um número maior de expressões do que aquele tradicionalmente encontrado em manuais de lógica. Como seria possível formular raciocínios sem expressões como 'em', 'para','com', 'portanto', 'ora', etc? Em resumo, a tópico neutralidade funciona como um critério que fornece as condições necessárias, mas não suficientes para que algo conte como lógico, pois inclui muito mais itens do que aqueles que tradicionalmente consideramos como lógicos. Precisaríamos de um critério preciso capaz de dar conta das escolhas de constantes lógicas feitas até então. Seguindo (GOMEZ-TORRENTE, 2002), endossamos que o problema das constantes lógicas consiste em:

(*) Demarcar em algum princípio não arbitrário o conjunto de expressões que a lógica *deveria* contar como lógicas visto que tais expressões são responsáveis por determinar a validade de argumentos.

A proposta que chamaremos aqui de 'caracterizações inferenciais' surge como uma tentativa de captar a ideia de aplicabilidade geral da lógica usando como ferramenta as regras de introdução e eliminação para as constantes. Analisaremos em detalhes essa perspectiva na segunda parte deste trabalho. Antes disso fornecemos alguns exemplos que justificam a pertinência do problema das constantes lógicas e a escolha feita sobre um de seus aspectos, a saber, a disputa sobre a identidade.

[3] Subjacente a essa explicação está a ideia de que tópico-neutralidade significa 'aplicabilidade universal'. Outra proposta mencionada por (MACFARLANE, 2015) é a de compreender tópico neutralidade como 'indiferença aos objetos do discurso'.

1.2 Por que precisamos de uma demarcação?

A resposta mais direta à pergunta que intitula esta seção é: para resolver problemas em filosofia da lógica! Notamos inicialmente que as constantes lógicas operam um papel central com relação a validade de argumentos. Além disso, ressaltamos o fato de que a noção de tópico-neutralidade, ainda que necessária, não é condição suficiente para que possamos distinguir os termos lógicos de extra-lógicos. Se não há um tal critério, o que justificaria o uso de expressões como 'verdade lógica', 'necessidade lógica'? Em outros temos, o que distinguiria a lógica de outras ciências? (SAINSBURY, 2000)

Entretanto, o ponto central é que o o desenvolvimento da lógica têm levantado a questão da legitimidade de sistemas lógicos que tem surgido. *Grosso modo,* o pressuposto é o de que se uma linguagem artificial é candidata ao nome de lógica ela deve conter essencialmente em seu léxico apenas constantes lógicas.(GOMEZ-TORRENTE, 2002). Como existem sistemas lógicos que possuem um vocabulário lógico com itens diferentes dos tradicionais da lógica clássica, surge a suspeita se esses sistemas realmente deveriam ser chamados de lógicas. Como exemplo, podemos mencionar a disputa se lógica modal é realmente lógica – isso nos conduzirá a uma pequena digressão.

Digressão. Em linhas gerais, uma modalidade é uma expressão que qualifica o *modo de verdade* quando aplicada a uma determinada afirmação. Originalmente, o emprego da expressão ' lógica modal' restringia-se a sistemas cujo objetivo era o estudo do comportamento dedutivo das expressões *'possivelmente'* e *'necessariamente'*. Obtemos uma lógica modal proposicional a partir de lógicas proposicionais comuns adicionando-se os operadores $\Box$ e $\Diamond$. Contemporaneamente 'lógica modal' é usado para cobrir uma família de sistemas que, ainda que qualifiquem as condições de verdade de enunciados, pretendem se direcionar, por exemplo, a contextos de crença, temporal, deônticos, entre outros. No artigo *'Is Modal Logic Logic?',* Harman (1972) analisa a legitimidade de uma lógica que tenha como objetivo o tratamento de expressões modais. Mais especificamente, Harman apresenta três abordagens a noções modais, a saber, a lógica modal, a teoria da modalidade e modalidade '*explained away*'. [4] O objetivo do artigo é mostrar que essas abordagens são significativamente diferentes e que há boas razões para se preferir a teoria da modalidade em detrimento das outras.

A diferença apresentada por Harman (1972, pg. 75) entre as abordagens mencionadas acima é a seguinte. Na lógica modal, as expressões 'possivelmente' e 'necessariamente' são tratadas como constantes lógicas para as quais certos princípios são estabelecidos. Por outro lado, em uma teoria da modalidade, 'possivelmente' e 'necessariamente' funcionam como predicados de sentenças e que dependem de certos princípios alegadamente *não lógicos*. Por fim, modalidade *explained away* considera modalidades aléticas como uma

[4] Pretendi manter o termo em inglês em vista da ausência de um termo em português com o mesmo significado de 'explicar tornando não importante'.

quantificação sobre mundos possíveis disfarçada. Por exemplo, 'se é necessário que ϕ e ψ, então é necessário que ϕ' conta como uma verdade lógica do ponto de vista de uma lógica modal, ao passo que para uma teoria da modalidade essa sentença conta como uma verdade da teoria e não da lógica. No caso da modalidade *explained away*, a proposta é que um enunciado como o do exemplo deva ser parafraseado nos seguintes moldes: 'se para todo mundo w, ϕw e ψw, então para todo mundo w, ϕw'. [5] A questão de Harman é tentar entender em que se baseia a inferência de que 'necessariamente ϕ e ψ' implica 'necessariamente ϕ' Seria apenas em virtude da forma logica ou em virtude de aspectos extralógicos? Se essa relação é válida em virtude da forma é por que 'necessariamente' é uma constante lógica ou por que essa relação pode ser explicada recorrendo-se à lógica de primeira ordem?(HARMAN, 1972, pg. 78). Essas são as questões que conduzem Harman a seguinte perspectiva com relação a lógica modal:

1. Lógica modal não é requerida como lógica.

2. Lógica modal não funciona como lógica.

3. Lógica modal trata erroneamente como constantes lógicas elementos que pertencem a uma classe sintática diferente.

4. Lógica modal distorce a sintaxe de enunciados modais da linguagem natural.

Essas teses podem ser divididas em dois grupos. O primeiro par depende de uma visão sobre o que é lógica, enquanto que o segundo se relaciona com uma compreensão da natureza das expressões modais tal como aparecem na linguagem natural.

Duas características são apresentadas como fundamentais para o que conta como lógica. A primeira é a de que generalizações lógicas são comprometidas com a noção de 'forma' e 'verdade', seguindo a diretriz de que tudo que possua um certa forma é uma verdade (HARMAN, 1972, pg. 78). Embora não esteja explicitamente em seu texto, parece razoável pensar que as generalizações lógicas que Harman tem em mente são aquilo que chamamos simplesmente uma verdade lógica. Assim, por exemplo, o princípio de não-contradição $\forall x \sim (Fx \wedge \sim Fx)$ seria uma generalização lógica. São sentenças semelhantes a essa que parecem estar em jogo quando o autor menciona a segunda característica do que é lógica, e que toma como mais fundamental, a saber, a de que as generalizações lógicas funcionam como princípios que permitem uma dada teoria representar suas consequências lógicas possivelmente infinitas. O apelo a princípios lógicos é a condição *sine qua non* de articulação de quaisquer teorias.

[5] Segundo Harman (1972, pg. 76), embora presente, essas distinções não foram bem estabelecidas no *Meaning and Necessity,* visto que, por exemplo, Carnap considera lógica modal enquanto uma teoria de modalidades, o que sugere uma não diferenciação entre lógica e teoria.

> Agora não é arbitrário organizar a posição de alguém (ou a ciência) de um modo que apele a princípios da lógica, *pois não há alternativa.* Pela mesma razão não é arbitrário que lógica deva incluir lógica proposicional e teoria da quantificação. Na prática no menos essa quantidade é necessária. Ademais, essa quantidade é suficiente. Na prática, dada lógica proposicional e a teoria da quantificação, ao invés de qualquer lógica mais rica alguém pode se contentar com adições à teoria. Por exemplo, alguém pode ter teoria dos conjuntos no lugar de lógica de ordem superior (HARMAN, 1972, pg. 78, grifo nosso). [6]

Duas coisas são pressupostas por Harman. Primeiro, que os limites do que é lógica coincide com os limites das verdades especificadas apenas por meio da forma lógica. Segundo que a lógica que alguém endossa serve que essa mesma pessoa organize sua teoria de tal modo que ele possa dar conta das consequências da mesma. Com isso, Harman propõe o assim chamado *princípio conservativo* que, segundo ele, distinguiria a lógica de uma simples teoria: *'Conte como lógica apenas o que você deve'*(HARMAN, 1972, pg. 79). [7] Em linhas gerais, a ideia é que a mudança de princípios lógicos tem um custo maior que a mudança de uma teoria, uma vez que os princípios lógicos são responsáveis pela própria organização da teoria. De acordo com essa perspectiva, é mais parcimoniosa a manutenção dos princípios lógicos, sendo a mudança de uma lógica a outra condicionada a casos necessários, ou seja, situações recalcitrantes que nos constrangem a assim proceder. Aplicando esse raciocínio à logica modal, Harman argumenta que a posição privilegiada que a lógica de primeira ordem usufrui é perceptível mesmo quando se analisa o método que os defensores da lógica modal conduzem seus estudos, como no caso de se apresentar uma semântica para os operadores $\Box$ e $\Diamond$. Por exemplo, as condições de verdade para o operador $\Box$ são apresentadas em uma metalinguagem não modal simplificadamente nos seguintes termos: '$\Box\phi$ é verdadeira se, e somente se, em todo mundo possível w, ϕ é verdadeira'. Segundo Harman (1972, pg. 80), fornecer uma 'semântica' para lógica modal em uma metateoria que não é modal é tratar lógica como um epifenômeno supérfluo. Além disso, a própria explicação de uma noção modal como 'necessário' em termos de 'verdadeiro em todo mundo possível', já configuraria, de acordo com Harman, um tratamento semanticamente satisfatório sem se requerer uma lógica que trate 'necessário' ou 'possível' como constantes lógicas. A conclusão esboçada pelo autor é a de que lógica modal é tratada como lógica embora não funcione como lógica (HARMAN, 1972, pg. 80). Um segundo princípio é então, trazido à tona *'Conta como lógica apenas o que funciona como lógica'*.

[6] *Now it is not arbitrary to organize one's view (or science) in a way that appeals to principles of logic,* for there is no alternative. *For the same reason it is not arbitrary that logic should include propositional logic and quantification theory. In practice at least that much is needed. Furthermore, that much is enough. In practice, given propositional logic and quantification theory, instead of any richer logic one can make do with additions to theory. For example, one can have set theory in place of a higher order logic.*

[7] Esse princípio em nada tem a ver com princípio de conservatividade proposto por (BELNAP, 1962) segundo o qual uma lógica é extensão conservativa de outra se ela não passa a demonstrar coisas antes não demonstradas.

Vale notar que, embora a presente discussão tenha sido endereçada à lógica modal, a proposta de Harman se estende a outros sistemas formais como, por exemplo, a lógica epistêmica, cujo ponto de partida está no reconhecimento do papel dedutivo de expressões como ‘acredita que’, ‘sabe que’, entre outros. No entanto, tratar esses sistemas como lógicas é, segundo Harman, um sintoma da incapacidade de lógicos e filósofos em distinguir lógica de teoria, divisão que supostamente ele foi capaz de estabelecer.

Nessas disputas estão envolvidas questões como o que de fato é um sistema formal, que características deveriam ser tomadas como essenciais, e que tipo de papel a logica deve desempenhar. Deveríamos ignorar os aspectos como raciocinamos atualmente? Podemos resolver essas questões de modo independente do problema da divisão dos termos lógicos? Tudo isso nos levaria a discussões que inviabilizariam nosso trabalho, por isso decidimos focar em um aspecto aparentemente não disputável. ***Fim da Digressão***.

Interessantemente, há um caso de ampliação de vocabulário lógico aparentemente não problemático. Distingue-se a lógica de primeira ordem com identidade da lógica de primeira ordem sem identidade. Na primeira o simbolo ‘=’ é tratado como uma constante lógica. Como Shapiro (2014) observa, dificilmente alguém disputaria que ambas são lógicas legítimas. Entretanto, ainda há a disputa se a identidade é realmente uma constante lógica. Usaremos esse tópico como mote do nosso trabalho daqui por diante. Na seção seguinte apresentarei argumentos que buscam defender a logicidade da identidade argumentando em favor da sua indispensabilidade. Como veremos, essa estratégia não é, de todo, satisfatória.

Até então vimos que as constantes lógicas fazem parte de algumas teorias lógicas ao longo da história da lógica, exercendo um papel central. Ainda, por mais que se apresentem como noções importantes não possuímos uma clara distinção entre o que distingue essas expressões das demais. O apelo a tópico neutralidade é insuficiente para dar conta do problema.

O problema se relaciona com outros tópicos da filosofia da lógica e tentar resolvê-lo nos ajudaria a esclarecer outros problemas. Como alguns tópicos precisariam levar em consideração outros aspectos como o que é um sistema formal, optaremos por um caso aparentemente mais simples em que temos o acréscimo de vocabulário a um sistema que tradicionalmente tem se considerado como lógico: esse é o caso da identidade como parte das constantes lógicas da lógica clássica de primeira ordem.

1.3 Estudo de Caso: A identidade é uma constante lógica?

A identidade é um daqueles tópicos transdomínio dentro da filosofia. Os debates envolvendo essa noção aparentemente simples tomam diferentes formas. Por exemplo, em metafísica há uma longa tradição pondo em questão se podemos ou não banharmo-nos no mesmo rio duas vezes. Questões de *identidade pessoal, critérios de individuação* e *identidade entre mundos possíveis* estão entre os principais interesses de filósofos que dirigem seus esforços na tentativa de especificar quais são as categorias mais básicas da realidade. No momento, iremos mudar um pouco o foco. O que nos ocupará daqui em diante é a questão se deveríamos tomar a identidade como um item essencial em nosso conjunto de expressões lógicas. Em uma pergunta, seria a identidade uma constante lógica?

De um ponto de vista intuitivo dizer que um objeto 'a' é idêntico a 'b' é dizer que 'a' e 'b' são o mesmo. Um truísmo, se dirá. Contudo, a noção de "mesmidade" é ambígua; pode ser compreendida ao menos de dois modos. Dizemos que certos objetos são *qualitativamente idênticos* se eles compartilham apenas algumas propriedades. Um bom exemplo são gêmeos idênticos. Dizemos que eles são idênticos porque compartilham um grande número de propriedades, mas ainda assim concebemo-os como indivíduos diferentes. Em nossa terminologia, gêmeos idênticos são apenas qualitativamente idênticos. Por outro lado, nosso interesse aqui é com a *identidade numérica*, a saber *a relação que uma coisa tem consigo mesmo e com nada mais.*

Em lógica de primeira ordem, os seguintes axiomas são incorporados ao sistema quando a identidade é adicionada ao conjunto de constantes lógicas:

$$(\alpha_1) : \forall x(x = x)$$

$$(\alpha_2) : \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

O axioma (α_1) expressa a reflexividade da identidade que, por sua vez, captura a ideia de que *tudo é idêntico a si mesmo.* (α_2) é o princípio leibniziano de *indiscernibilidade dos idênticos* de que se 'x' é idêntico a 'y' então o que é verdade acerca de 'x' também é verdade sobre 'y'. Como é evidente, a identidade está associada ao símbolo '=' que advém da matemática. Não apenas o simbolo mas algumas propriedades que são familiar aos matemáticos também são atribuídas a identidade como, por exemplo, reflexividade, simetria, transitividade. Ou seja, qualquer que seja o objeto, ele é idêntico consigo mesmo $(x = x)$, se $x = y$ então $y = x$ e se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

Em um sistema de dedução natural para a lógica clássica de primeira ordem – doravante $LPO^=$ – as regras de inferência para a identidade são as seguintes:

$$(=_I)\,\frac{}{t = t} \qquad (=_E)\,\frac{x = y \qquad Fx}{Fy}$$

A regra de introdução da identidade $(=_I)$ não depende de suposições. Em $LPO^=$ essa regra pode ser introduzida em qualquer passo de uma dedução. A regra de eliminação da identidade $(=_E)$ é a expressão da indiscernibilidade dos idênticos mencionada acima, mas como uma regra de substituição. Se em uma dedução é possível derivar uma identidade e em outro contexto se obtém uma sentença na qual ocorre um dos termos da identidade previamente estabelecida, então é justificável a substituição pelo outro termo da identidade. Como mera ilustração, suponha que se afirme que "Lewis Carroll é o autor de *Alice no País das Maravilhas*" e que, posteriormente se estabeleça que "Lewis Carroll é Charles Dodgson", por ($=_E$) estamos autorizados a concluir que "Charles Dodgson é o autor de *Alice no País das Maravilhas*".

Além disso, identidade também é usada com o propósito de se regimentar algumas expressões da linguagem natural, tais como, 'pelo menos/no máximo n indivíduos tais que...', 'o único x tal que...'. As sentenças,

(1) Pelo menos três pessoas leram o texto,

(2) Maria comprou no máximo dois livros,

(3) O autor de *A revolução dos bichos* é jornalista,

são formalizadas em $LPO^=$, respectivamente, como

(1') $\exists x \exists y \exists z(\sim x = y \wedge \sim x = z \wedge \sim y = z \wedge \exists u(Rxu \wedge Ryu \wedge Rzu))$

(2') $\exists x \exists y(Cmx \wedge Cmy \wedge \forall z(Cmz \rightarrow (x = z \vee y = z)))$

(3') $\exists x(Ax \wedge \forall y(Ay \rightarrow x = y) \wedge Jx)$

É importante notar que, com relação a (3), (3') é apenas uma possibilidade de interpretação. As expressões mencionadas acima não são expressáveis em lógica de primeira ordem sem identidade. Desse modo, $LPO^=$ possui maior poder expressivo do que LPO. Aparentemente, se estamos interessados na cardinalidade do domínio do discurso, então é preciso levar a identidade em consideração. Entretanto, seriam as considerações feitas, até então, suficientes para tratar '=' como uma constante lógica? Analisaremos a seguir um argumento em favor da logicidade da identidade.

1.3.1 Frege–Dummett: a indispensabilidade da identidade

De acordo com Dummett (DUMMETT, 1973, p. 542), foi Frege o primeiro a tratar a identidade como uma noção lógica e dentre as principais motivações está o fato de que a identidade é pressuposta em qualquer definição aceitável e, desse modo, a identidade seria indispensável. Como Dummett observa,

> [...] de acordo com Frege, identidade é indefinível visto que ela é necessária para a formulação de qualquer definição: uma definição, ao menos uma definição explícita, deve sempre assumir a forma de uma estipulação da verdade de um enunciado de identidade; e, em seus escritos após a

> *Grundlagen*, Frege não reconheceu a legitimidade de nenhum outro tipo de definição além de uma definição explícita. É verdade que, na *Grundlagen*, Frege fala da lei de Leibniz como uma 'definição' da identidade, e diz que ele irá adotá-la como sua: contudo, nos dois sistemas formais, aquele da *Begriffsschrift* e aquele da *Grundgesetze*, a identidade é um primitivo, e a tese de que a identidade é indefinível é o fundamento que ele fornece, em *Function und Begriff* e em outro lugar, para considerá-la desse modo.(DUMMETT, 1973, pp. 542-543) [8]

De fato, se qualquer definição envolve a identidade tentar defini-la seria já pressupô-la. Não à toa Frege tomar a identidade como uma noção primitiva. Contudo, Dummett argumenta que a tese fregeana da indefinibilidade da identidade não é convincente. Segundo Dummett (1973, pg. 543), Frege usava a identidade para cumprir também o papel do bicondicional. Não iremos levar essa discussão adiante, mas é importante notar que a tese de indefinibilidade é recorrente na literatura (veja, por exemplo, (SAVELLOS, 1990; McGINN, 2000; BUENO, 2014)). O problema que iremos tratar é o seguinte. Comparada as outras constantes lógicas a identidade possui um comportamento peculiar. Por um lado temos expressões, como constantes individuais e predicados, que são usadas de modo a produzir sentenças atômicas e que não fazem parte do vocabulário lógico. Conectivos sentenciais e quantificadores, por seu lado, são operadores usados para formar sentenças complexas a partir de sentenças atômicas. Como pode ser observado com os exemplos anteriormente descritos, '=' combina duas constantes individuais para formar uma sentença atômica, exercendo o mesmo comportamento das expressões que compõe o vocabulário não-lógico. Em outras palavras, dentro desta divisão sintática a identidade mantem-se aquilo que intuitivamente parece ser: uma relação. Ora, se conectivos sentenciais e quantificadores pertencem a categoria de itens formadores de sentenças complexas e a identidade não, e tendo em mente o fato de que os primeiros são considerados constantes lógicas, então por que haveríamos de conceber a identidade como lógica, dado que sua categoria é distinta daqueles?

A pergunta que enunciamos acima só é um problema caso estejamos comprometidos com um *critério gramatical de logicidade*. De acordo com um critério gramatical, contam como lógicas as expressões que comportam-se como operações formadoras de sentenças complexas. Embora tome o critério gramatical apenas como uma sugestão, Dummett (1973, pg. 22) afirma que este é um princípio simples e preciso que distingue as constantes lógicas de outras expressões e que se adéqua à prática corrente, porque admite expressões como 'necessariamente', 'possivelmente', 'deve', isto é, expressões que

[8] *[...] according to Frege, identity is indefinable, since it is required for the formulation of any definition: a definition, at least an explicit definition, must always take the form of a stipulation of the truth of an identity-statement; and, in his writings after* Grundlagen*, Frege recognized the legitimacy of no other kind of definition than an explicit one. It is true that, in* Grundlagen*, Frege speaks of Leibniz's law as a 'definition' of identity, and says that he will adopt it as his own: in both formal systems, however, that of* Begriffsschrift *and that of* Grundgesetze*, identity is primitive, and the thesis that identity is indefinable is the ground he gives, in* Function und Begriff *and elsewhere, for taking it so.*

quando adicionadas a linguagens formais deverão construir sentenças complexas a partir das sentenças atômicas. [9] Desse ponto de vista, é com expressões desse tipo que a lógica deveria estar comprometida. Com as outras expressões, sejam elas constantes individuais, predicados ou quaisquer outras, a lógica interessa-se apenas esquematicamente:

> [...] isto é, ela é comprometida com as regras gerais governando a subdivisão das palavras do primeiro tipo em diferentes categorias lógicas – nomes próprios, predicados unários, expressões relacionais, e assim por diante – e com os modos nos quais termos destes vários tipos diferentes podem ser postos juntos para formar sentenças atômicas; mas não com os sentidos de qualquer termo particular ou expressões destas diferentes categorias (DUMMETT, 1973, pg. 22) [10]

Ciente da dificuldade que deveria enfrentar com relação a "=", Dummett faz a seguinte concessão:

> Chamemos de *condição de segundo nível* qualquer condição que, para algum domínio de objetos, é definida como sendo satisfeita ou o contrário por todo predicado que é, por sua vez, definido sobre este domínio de objetos. Dentre tais condições de segundo nível, podemos chamar de *condição quantificacional* (*quantifier condition*) qualquer uma que seja invariante sob cada permutação do domínio de objetos: isto é, para qualquer predicado '$F(\xi)$' e qualquer permutação φ, ela satisfaz '$F(\xi)$' apenas no caso em que ela satisfaz o predicado que aplica-se a apenas aqueles objetos $\varphi(a)$, onde '$F(\xi)$' é verdadeiro de a. Assim, nós permitimos também como sendo uma constante lógica qualquer expressão que, com a ajuda dos quantificadores universal e existencial e os operadores sentenciais, nos permite expressar uma condição quantificacional que não poderia ser expressa por meio daqueles dois quantificadores e dos operadores sentenciais sozinhos. Desse modo, o sinal da identidade é reconhecido, sob este critério como uma constante lógica, visto que ela nos permite expressar a condição de que um predicado aplica-se a no máximo um objeto, que não poderia ser expressa sem ela.(DUMMETT, 1973, p. 22) [11]

[9] O termo 'gramatical', portanto, é usado no sentido de gramática de linguagens formais e não como gramática da linguagem natural. Ressaltamos que a inclusão de Dummett como representante dessa vertente é devido a MacFarlane (2015). Dummett não menciona o termo gramatical, mas apenas fala da construção de sentenças complexas passo-a-passo (*step-by-step*).

[10] [...] *that is, it is concerned with the general rules governing the subdivision of words of the first type into different logical categories—proper names, one-place predicates, relational expressions, and so forth—and with the ways in which words of these various different types can be put together to form atomic sentences; but not with the senses of any particular words or expressions of these different categories.*

[11] *Let us call a* second-level condition *any condition which, for some domain of objects, is defined, as being satisfied or otherwise, by every predicate which is in turn defined over that domain of objects. Among such second level conditions, we may call a* quantifier condition *any which is invariant under each permutation of the domain of objects: i.e. for any predicate '$F(\xi)$' and any permutation φ, it satisfies '$F(\xi)$' just in case it satisfies that predicate which applies to just those objects $\varphi(a)$, where '$F(\xi)$' is true of a. Then we allow as also being a logical constant any expression which, with the help of the universal and existential quantifiers and the sentential operators, allows us to express a quantifier condition which could not be expressed by means of those two quantifiers and the sentential operators alone. Thus, the sign of identity is recognized, on this criterion, as a logical constant, since it allows us to express the condition that a predicate applies to at most one object, which cannot be expressed without it.*

Alguns esclarecimentos sobre a proposta de Dummett. Primeiramente, notamos que a letra grega (ξ) é usada acima como uma variável, indicando o lugar de um argumento em um predicado. Uma *permutação* do domínio de objetos é qualquer *bijeção* do domínio em si mesmo. Lembramos que uma bijeção é uma função que é tanto *injetiva* (i.e., não existem objetos distintos no domínio da função que possuam a mesma imagem) quanto *sobrejetiva* (isto é, todos os elementos do contradomínio da função são imagem de algum elemento do domínio). *Grosso modo*, um conjunto é *invariante sob permutação* quando sua permuta devolve como resultado o próprio conjunto. Em termos de funções, isso quer dizer que o domínio e a imagem da função coincidem. Agora, suponha que quiséssemos propor uma condição *'existe no máximo n coisas...'* (abreviada como $\exists_{\leq n}$) que será satisfeita quando o número de objetos que caem sob a extensão de um determinado predicado um determinado predicado Fx em um domínio D não ultrapassa o número n . Seguindo o raciocínio de Dummett, essa só poderá ser uma condição quantificacional se for verdadeira em toda interpretação induzida pela permutação do domínio. Ou seja, se $D*$ é uma permuta de D, $\exists_{\leq n} xFx$ tem de ser verdadeira em D*, onde a nova interpretação de Fx consiste exatamente das imagens dos objetos de D obtidos por meio da permutação.

A justificativa de Dummett para a logicidade da identidade pode ser resumida como: (i) a condição '*no máximo um objeto tal que...*' é invariante sob permutação, mas caso não seja tomada como noção primitiva, (ii) essa condição só pode ser formulada com a ajuda da identidade, então (iii) a identidade deve contar como constante lógica. O curioso é que invariância sob permutação foi proposto como critério de logicidade por Tarski, que por si só conta a identidade como uma noção lógica, assim não precisaríamos de uma concessão. Dado que os objetivos de Dummett em (DUMMETT, 1973) são outros que não o de fornecer uma teoria de logicidade para as expressões que a lógica deveria lidar, é difícil estabelecer o que exatamente o critério gramatical pretende captar; se uma noção de tópico-neutralidade ou apenas a ubiquidade de certos termos. De todo modo, ao menos é claro que assim como Frege, Dummett considerou, por uma perspectiva diversa, o mesmo fato: a indispensabilidade da identidade. Entretanto, será esse o melhor argumento em favor da identidade? Essa será a questão que trataremos adiante.

Em resumo, vimos que a identidade compõe algumas das inferências que elaboramos rotineiramente, além disso, ela pode ser usada na regimentação de outros termos da linguagem natural como 'no máximo', 'no mínimo', 'o único x, tal que Fx'. Historicamente, Frege adotou a identidade como constante lógica porque considerou que ela seria indispensável por seu papel em definições. Dummett, por seu lado, a considerou indispensável por conta de seu papel em condições quantificacionais.

A seguir, nosso objetivo sera a apresentação de abordagens que dispensam o uso da identidade em sistemas formais. Em 1.3.2 apresentamos Quine e sua proposta para obtermos um substituto da identidade. Essa parte é seguida pela apresentação de algumas objeções ao método proposto. Em seguida apresentamos a abordagem de Hintikka (1956) e (WEHMEIER, 2012), em que uma linguagem livre da identidade e proposta, indo mais longe, apresentamos os argumentos de Wehmeier contra a própria existência da identidade numérica.

1.3.2 Quine e a logicidade da identidade

Quine é outro grande representante do critério gramatical para logicidade. Em sua abordagem, Quine (1986, pg. 26-27) associa os termos lógicos de uma línguagem lógica às suas *particulas* gramaticais, que são os itens linguisticos responsáveis pela construção de sentenças complexas a partir de sentenças mais simples. São essas partículas que constituem a estrutura lógica das sentenças que, por sua vez, é elemento central em sua formulação da noção de verdade lógica. Os outros itens da linguagem fazem parte do *léxico*, que abarca, por exemplo, letras esquemáticas. Embora tenha endossado o critério gramatical como justificativa para a logicidade, Quine (1986) escolheu uma abordagem diferente daquela de Dummett ao abordar a identidade. De acordo com Quine, muito embora existam razões para tratar a identidade como uma constante lógica, de um ponto de vista lógico podemos propor um substituto que satisfatoriamente cumpra o seu papel. As afirmações que servem de fundamento para essa tese são apresentadas adiante.

Primeiramente abordaremos o motivo de Quine se preocupa com a identidade, e nosso ponto de partida é a noção de verdade lógica. Uma das propostas de Quine é considerar que uma verdade lógica nada mais é que 'uma sentença cuja verdade é assegurada por sua estrutura lógica' (QUINE, 1986, pg. 49). A estrutura lógica depende da disposição dos operadores lógicos e dos itens que pertencem ao léxico, como predicados e variáveis. A sentença '$\sim \exists x(Filosofo(x) \wedge \sim Filosofo(x))$' é uma instância de uma verdade lógica conhecida como princípio da não contradição, em primeira ordem formalizado como '$\sim \exists x(Fx \wedge \sim Fx)$'. Quine (1986, pg. 49) então propõe que verdade lógica pode ser entendida em termos de substituição, a saber, que 'uma sentença é logicamente verdadeira se ela permanece verdadeira sob todas as substituições de seus predicados'. De um ponto de vista linguístico, a identidade ($=$) é um predicado binário. Assim, verdades da teoria da identidade como por exemplo que '$x = x$', não seriam verdades lógicas uma vez que poderíamos substituir ($=$) por outros predicados que falsificam a afirmação – basta substituir ($=$) por ($>$) e ver que isso é o caso. Então, a preocupação de Quine é saber se deveríamos encarar a ($=$) como uma noção pertencente à lógica ou se deveríamos considerá-la noção extra-lógica pertencente à matemática. É à luz dessas considerações que Quine elabora os argumentos expostos abaixo.

A teoria da identidade é completa. Como fato bem conhecido, a lógica clássica de primeira ordem possui a (meta-)propriedade de completude, o que significa que se um argumento é semanticamente válido então há uma demonstração formal que testemunha esse fato. Quando os axiomas da identidade

$$(\alpha_1) : \forall x(x = x)$$

$$(\alpha_2) : \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

são adicionados à lógica clássica essa propriedade ainda se mantém válida. Quine usa isso com o objetivo de contrastar a teoria da identidade com a teoria dos números. A teoria dos números não possui um formalismo dedutivo completo como demonstrado pelo famoso teorema da incompletude de Gödel. Do ponto de vista quineano, esse é um aspecto no qual *'a teoria da identidade parece um vizinho próximo da lógica'*(QUINE, 1986, p. 62).

Identidade é universal. Sobre isso Quine afirma o seguinte:

> Outro aspecto no qual a teoria da identidade parece mais próxima à lógica do que à matemática é a universalidade: ela trata todos os objetos imparcialmente. Qualquer teoria na verdade pode do mesmo modo ser formulada com variáveis gerais alcançando tudo, mas ainda assim os únicos valores de variáveis que importam para a teoria dos números, por exemplo, ou teoria dos conjuntos, são os números e os conjuntos; enquanto que a teoria da identidade não conhece preferências. (QUINE, 1986, p.62) [12]

Em suma, a universalidade da identidade tem a ver com o fato de que ela é indiferente aos objetos do discurso. Não importa se estamos falando de números, carros, árvores, seres humanos, em todo caso a identidade terá lugar.

Identidade é unicamente caracterizável. Intuitivamente, a ideia de que uma constante lógica é unicamente caracterizável significa que se um conjunto de axiomas ou regras é fornecido para uma constante $\#_1$, então uma versão duplicada desses mesmos axiomas ou regras que caracterize uma constante $\#_2$ deverá resultar no fato de que as fórmulas construídas com $\#_1$ e $\#_2$ a partir dos mesmos componentes deverão ser equivalentes. Em particular, Quine (1986, pp. 62-63) observa que isso acontece com a identidade. Definir duas noções de identidade, digamos '$=_1$' e '$=_2$', satisfazendo os mesmos axiomas (α_1) e (α_2), nos conduz ao fato de que "$=_1$" e "$=_2$" irão coincidir em suas ocorrências. É fácil ver que isso é o caso, basta que se demonstre que '$x =_1 y$' implica que '$x =_2 y$' e vice-versa. Para isso utilizarei ($\alpha_1^{=_1}$) e ($\alpha_2^{=_1}$) para se referir ao axiomas da identidade $=_1$ e os respectivos para a $=_2$ com indicação a devida indicação. Assim sendo, suponha que (i) $x =_1 y$. Como ($\alpha_2^{=_1}$) é válido para qualquer predicado F, temos que (ii) $x =_1 y \rightarrow (x =_2 x \leftrightarrow x =_2 y)$. De ($i$) e ($ii$), por *modus ponens* obtemos (iii) $(x =_2 x \leftrightarrow x =_2 y)$. Do axioma ($\alpha_1^{=_2}$) e ($iii$), pelo significado da bi-implicação, segue-se

[12] *Another respect in which identity theory seems more like to logic than mathematics is universality: it treats of all objects impartially. Any theory can indeed likewise be formulated with general variables, ranging over everything, but still the only values of the variables that matter to number theory, for instance, or set theory, are the numbers and the sets; whereas identity theory knows no preferences.*

que (iv) $x =_2 y$ que é parte da conclusão que pretendemos alcançar e que corresponde a seguinte árvore. [13]

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x =_2 x}\,(\alpha_1') \qquad \cfrac{\cfrac{}{x =_1 y}\,[\mathrm{m}] \qquad \cfrac{}{x =_1 y \rightarrow (x =_2 x \leftrightarrow x =_2 y)}\,(\alpha_2)}{x =_2 x \rightarrow x =_2 y}\,\rightarrow E}{x =_2 y}\,\rightarrow E}{x =_1 y \rightarrow x =_2 y}\,\rightarrow I;\ \mathrm{m}{:}\ x =_1 y$$

Para a conclusão de que $x =_2 y$ implica que $x =_1 y$ basta que se modifique a demonstração trocando as ocorrências de $=_1$ por $=_2$, o mesmo se aplicando a seus respectivos axiomas

Identidade é reduzível. Quine argumenta que não precisamos de suposições extras para obter a identidade, no sentido de que o conjunto de axiomas ou mesmo os argumentos anteriormente esboçados são totalmente dispensáveis. A proposta aqui é a de produzir substituto para a identidade. A estratégia usada por Quine é reduzir a noção de identidade a noção de indistinguibilidade a partir da combinação exaustiva dos predicados da linguagem que temos em mãos. Como exemplo, Quine considera uma linguagem com apenas quatro predicados, sendo A um predicado unário, B e C predicados binários e D um predicado ternário. A combinação mencionada segue os seguintes moldes:

$$\textbf{(3)} \quad Ax \leftrightarrow Ay \wedge \forall z(Bzx \leftrightarrow Bzy \wedge Bxz \leftrightarrow Byz \wedge Czx \leftrightarrow Czy \wedge Cxz \leftrightarrow Cyz \wedge \forall z'(Dzz'x \leftrightarrow Dzz'y \wedge Dzxz' \leftrightarrow Dzyz' \wedge Dxzz' \leftrightarrow Dyzz')).$$

De acordo com Quine (1986, p. 63), na situação mencionada, "$x = y$" é então definida como a abreviação para uma sentença complexa similar a **(3)**. A sentença **(3)** é a tentativa de expressar a identidade através de indistinguibilidade de dois objetos x e y que satisfazem os predicados da linguagem, mesmo em suas relações com quaisquer outros objetos z e z'. A proposta alcança satisfatoriamente seu objetivo pelas seguintes razões. De um ponto de vista geral, como **(3)** se trata de uma conjunção, ela só poderá ser verdadeira caso cada um de seus componentes sejam verdadeiros. Além disso, trata-se de uma conjunção de bi-implicações. Como bi-implicações são verdadeiras apenas quando seus componentes recebem o mesmo valor de verdade, seja verdadeiro ou falso, caso alguma dessas bi-implicações seja falsa isso quer dizer que x ou y discordam em pelo menos uma propriedade, utilizando o raciocínio por contraposição na indiscernibilidade dos idênticos, podemos concluir nesse caso que x e y são diferentes. Em seu método, Quine utiliza-se implicitamente do princípio recíproco da identidade dos indiscerníveis, nomeadamente, o princípio de *identidade dos indiscerníveis* , segundo o qual se tudo que é verdadeiro acerca de 'x' também mantem-se verdadeiro sobre 'y', então 'x' e 'y' são idênticos. Formalizando essa afirmação em $FOL^=$, obtemos

[13] Quine fornece uma demonstração em que o axioma (α_2) está na forma $\sim (x = y \wedge (Fx \wedge \sim Fy))$. Veja (QUINE, 1986, pp. 62-63).

$$(L) \quad \forall x \forall y((Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y)$$

Após fornecer seu método de obtenção de um substituto para a identidade, Quine faz a seguinte observação.

> Pode acontecer que os objetos pretendidos como valores das variáveis da quantificação não sejam completamente distinguíveis uns dos outros pelos quatro predicados. Quando isso ocorre, (3) falha em definir identidade genuína. Ainda assim, tal falha permanece inobservável de dentro da linguagem; desse ponto de vista (3) é tão boa quanto a identidade. (QUINE, 1986, p. 63) [14]

Em suma, mesmo que objetos satisfaçam exatamente os mesmos predicados combinados na forma de **(3)**, isso não garante que eles sejam de fato idênticos. Por exemplo, se apenas um predicado é usado para definir a identidade, então na esteira de **(3)**, $x = y$ deveria ser entendido como $\forall z(Pzx \leftrightarrow Pzy \wedge Pxz \leftrightarrow Pyz)$. Se objetos que temos como alvo de nossas quantificações são seres humanos, e P é o predicado 'ter o mesmo peso', então diferentes pessoas com o mesmo peso serão consideradas como a mesma pessoa. Quando x e y têm o mesmo peso, qualquer z que tenha o mesmo peso que x terá o mesmo peso que y, e se x tem o mesmo peso que qualquer z, y também terá. Esse é um caso onde o método proposto por Quine parece falhar em definir a identidade, no entanto, como o próprio Quine observa, do ponto de vista da linguagem isso é imperceptível. De todo modo, para alguns filósofos muito do que Quine afirma não é tão direto quanto parece.

Quine pretendeu dar conta da identidade por que ela, de certo modo, desafiava sua concepção de 'verdade lógica.' Ao tentar argumentar em favor da logicidade da identidade, para com isso evitar que ela fosse interpretada de outro modo, Quine forneceu uma série de argumentos, a saber, que identidade é completa, universal e unicamente caracterizável. Entretanto, sua conclusão foi a de que não precisaria, de todo, da identidade. Afinal, dado os predicados da linguagem, poderíamos fornecer um substituto que cumprisse o seu papel. Como ressaltamos, o método fornece a indistinguibilidade como substituto da identidade. A seguir são apresentados alguns problemas que parecem afetar a abordagem aqui descrita.

Considerações sobre a proposta de Quine

Uma série de controvérsias pairam sobre as propostas de Quine e no que se segue pretendo apresentar supostos problemas que surgem a essa abordagem. Quine é

[14] *It may happen that the objects intended as values of the variables of quantification are not completely distinguishable from one another by the four predicates. When this happens, (3) fails to define genuine identity. Still, such failure remains unobservable from within the language; (3)is as good as identity from that vantage point.*

acusado de ser imprevidente ao empregar de modo não qualificado o termo 'identidade'. Basicamente essa é a objeção de Béziau (2013). Em linhas gerais, sua motivação é a de que muito embora os axiomas

$$(\alpha_1) : \forall x(x = x)$$

$$(\alpha_2) : \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

sejam considerados axiomas da identidade, não podemos garantir que o operador ($=$) sempre será interpretado como a identidade numérica – a relação que uma coisa tem consigo mesma e nada mais. No que é conhecido como modelos normais para a identidade, ($=$) é interpretado como a diagonal do domínio D do discurso $\Delta_D = \{< x, x >: x \in D\}$. É possível fornecer interpretações que satisfaçam os axiomas (α_1) e (α_2) mas sem interpretar ($=$) como a diagonal. [15]

O que se pode garantir, no entanto, é que os axiomas anteriormente listados definem uma relação de congruência, isto é, uma relação de equivalência que é compatível com operações da linguagem de primeira ordem. Com isso em mente o autor defende que

> Não é possível concluir que a identidade trivial [identidade numérica] é lógica a partir de (e) [identidade é reduzível] ou (d) [identidade é unicamente caracterizável] visto que (e) ou (d) não se aplicam à identidade trivial, tudo o que sabemos é que (e) e (d) valem para identidade de Leibniz. É suficiente chamar de lógica a identidade de Leibniz? (BÉZIAU, 2013, pg. 4) [16]

Segundo Béziau (2013), o mais adequado seria dizer que em suas considerações Quine está falando da identidade de Leibniz (doravante $=_L$) e não da identidade trivial, negando assim que se possa defender a logicidade da identidade a partir das teses defendidas por Quine. O que aconteceria, no entanto, se a noção de identidade numérica, que ressalta a natureza binária da identidade, fosse um equívoco? Seria suficiente considerar $=_L$ como constante lógica? Da forma como penso, é completamente viável uma resposta afirmativa a essa questão. Pretendo elaborar essa ideia mais detalhadamente em (3.1). Antes disso apresentamos outros contra-argumentos a proposta de Quine.

Wiggins (2001, pg. 185) argumenta que o método proposto por Quine faz pouca justiça a evidente univocidade presente na afirmação de que 'x é o mesmo que y'. A ideia básica é que dadas diferentes teorias, por exemplo, T_1 e T_2, com diferentes estoques de predicados a única coisa que podemos garantir é uma noção de indistinguibilidade relativa

[15] O resultado em termos precisos é enunciado da seguinte forma, *For every L-structure* $\mathfrak{A}$ *with standard identity there is an L-structure* $\mathfrak{B}$ *which is a model of the same sentences of L as* $\mathfrak{A}$ *but doesn't have standard identity* (HODGES, 2001, p.64).

[16] *It is not possible to conclude that trivial identity is logical from (e) or (d) since (e) or (d) does not hold for trivial identity, all we know is that (e) and (d) hold for Leibniz identity. Is it enough to call Leibniz identity logical?*

a cada teoria. Desse modo, haveria uma noção de identidade relativa a T_1 e uma noção de identidade relativa a T_2. E de acordo com Wiggins isso levantaria dificuldades ao tentar explicar como falantes competentes com diferentes vocabulários, que pelo método quineano deverão fornecer diferentes substitutos para a identidade, compreendem uns aos outros. Além disso, com relação ao método proposto por Quine, Wiggins faz a seguinte observação.

> Pois o método de Quine faz qualquer sentido para nós por sua alusão oculta a, e dependência em, uma ideia que é essencialmente de segundo nível. A ideia de segundo nível é a de que a identidade é a relação cuja posse entre *a* e *b* assegura que toda propriedade de *a* é uma propriedade de *b* e *vice versa*. O problema com uma abordagem de segundo nível da identidade, contudo, é que ela envolve quantificar sobre todas as propriedades de primeiro nível, incluindo identidade reconstruída e outras incontáveis propriedades que de modo latente envolvem a identidade. (WIGGINS, 2001, pg. 185) [17]

Em linhas gerais, a questão de Wiggins é 'O que os diferentes substitutos da identidade têm em comum uns com os outros?'. Como já mencionamos com a crítica de Béziau, a abordagem de Quine garante apenas que sejam relações de congruência. Entretanto, Wiggins argumenta, não podemos expressar em uma linguagem de primeira ordem o que faz com que cada substituto seja de fato uma relação de identidade. Segundo Wiggins isso só poderia fazer sentido caso apelássemos para uma intuição de segunda ordem. Todavia, apelar para intuições de segunda ordem envolveria quantificar sobre propriedades que incluem os substitutos para a identidade e propriedades que alegadamente envolveriam a identidade. Qualificando desse modo um tipo de raciocínio circular. Partimos da tentativa de definir a identidade por meio de predicados da linguagem, mas esse método apenas faria sentido caso pudéssemos explicá-lo recorrendo a intuição de segunda ordem, mas isso faz com que quantifiquemos pressupondo a identidade, assim fechamos o círculo. Contudo, essa conclusão pode ser resistida. Primeiramente, Wiggins atribui a Quine o comprometimento com o princípio de 'indiscernibilidade do idênticos' formulado em segunda ordem, a saber,

$$(L_1) : \forall x \forall y \forall F(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

quando, na verdade, Quine reconhece seu comprometimento com uma forma amena da identidade dos indiscerníveis, a saber,

$$(L_2) \quad \forall x \forall y((Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y)$$

Se colocarmos a sentença **(3)** no escopo dos quantificadores em (L), obtemos o que poderia ser chamado de identidade de Quine (doravante $=_Q$), ou seja,

[17] *For Quine's method makes whatever sense it makes for us by its surreptitious allusion to and dependence upon an idea which is essentially second level. The second level idea is that identity is the relation whose holding between* a *and* b *ensures that every property of* a *is a property of* b *and* vice versa. *The trouble with a second level account of identity, however, is that it involves quantifying over all first level properties, including reconstructed identity and countless other properties that latently involve identity.*

$$(=_Q) \quad \forall x \forall y((\mathbf{3}) \rightarrow x = y)$$

Segundo, a argumentação de Quine tem em vista o caráter lógico da identidade, tentando argumentar o quão próximo ela está da lógica ao invés de ser tratada como qualquer outro predicado. Não é seu objetivo definir ou eliminar a identidade de uma vez por todas, mas sim fornecer meio tangíveis de lidar formalmente com essa noção dentro de uma teoria. O que nos dirige a objeção descrita abaixo.

Se a linguagem que usamos contasse com um número infinito de predicados, seria impossível definir a identidade seguindo os moldes da sentença **(3)**, e este é um ponto sobre o qual Quine estava ciente. A questão natural a se levantar, contudo, é a de se questionar quantos predicados são necessários para se obter um substituto adequado para a identidade. Wiggins menciona o seguinte exemplo.[18]

Suponha que tivéssemos uma linguagem com três predicados, a saber, 'x é uma floresta', 'x é uma árvore' e 'x nasce em y'. Caso adotássemos a metodologia quineana, a sentença

(1a) Em toda a floresta nasce mais de uma árvore

deveria ser falsa. Isso porque nesse contexto, seguindo a receita fornecida por Quine, um enunciado de identidade '$x = y$' seria expresso como

(1b) $Arvore(x) \leftrightarrow Arvore(y) \wedge Floresta(x) \leftrightarrow Floresta(y) \wedge \forall z(NasceEm(z, x) \leftrightarrow NasceEm(z, y) \wedge NasceEm(x, z) \leftrightarrow NasceEm(y, z))$

Note que uma formalização de (1a) na lógica de primeira ordem seguiria os seguintes moldes

(1a') $\forall x(Floresta(x) \rightarrow \exists y \exists z(Arvore(y) \wedge Arvore(z) \wedge NasceEm(y, x) \wedge NasceEm(z, x) \wedge (\sim y = z)))$

Como pode ser observado, nessa formalização utilizamos $(\sim y = z))$ para expressar que o fato de que o número de árvores é maior que um. Desse modo, ao negar que $y = z$ estamos afirmando que algum dos termos das conjunções em (1b) falha. Agora, suponha que a e a' sejam árvores que nasçam em uma floresta f. Usando (1b) não é possível diferenciar essas árvores, pois se a nasce em f então a' também nasce, e vice versa, se a é uma árvore então a' também o é, e vice versa, etc... Ou seja, (1b) continua sendo satisfeita, e do ponto de vista da linguagem existe apenas uma árvore em questão. Sem dúvida, uma paisagem

[18] O exemplo é atribuído a John Wallace, *Philosophical Grammar.* Stanford University Ph.D, 1964.

quase desértica. Portanto, nessa linguagem cujos únicos predicados são 'x é uma floresta', 'x é uma árvore' e 'x nasce em y' a sentença (1a) é falsa.

A sugestão apontada por Wiggins para evitar esse problema indesejado é reformular a tese de redutibilidade da identidade de modo a permitir a expansão do estoque de predicados. Entretanto, o seguinte problema surgiria.

> [...] tudo é visto depender sobre quais predicados são adicionados para forçar o valor de verdade desejado sob as sentenças envolvendo o predicado construído que é para ser introduzido no lugar de =. Suponha que as aparências possam apenas ser salvas se são disponibilizados predicados monádicos e poliádicos pressupondo a identidade ou individuação espaço-tempo ou individuadores de coisas (thing-individuation). Se é assim, é sob a presença deles que irá depender o sucesso do método de eliminação. (WIGGINS, 2001, p. 185) [19]

Basicamente a ideia é a de que se não é possível diferenciar árvores dentro da teoria descrita acima, poderíamos reformulá-la de modo que árvores sejam diferenciadas. Entretanto, Wiggins defende que se os predicados inclusos nessa teoria reformulada devem incluir predicados que pressupõe a identidade para que aí se possa diferenciar árvores, então será por isso que o método de Quine pode ser considerado satisfatório, pura e simplesmente por depender da identidade. Mas se o método é proposto com vistas a fornecer um substituto para a identidade, não faria sentido dizer que ele alcança seu objetivo de forma satisfatória quando na verdade está pressupondo aquilo que pretende eliminar. Acontece que nessa argumentação ao que parece, Wiggins está usando a noção de *critério de identidade*. Seguindo McKeon (2010, pg. 54), dizemos que um predicado P fornece um critério de identidade quando é determinado o que conta como um e o mesmo P. Se os predicados envolvidos na teoria reformulada incluíssem um predicado que trata da localização espaço-temporal, isso deveria envolver a identidade porque precisaríamos entender árvores como unidades discretas. Entretanto, será que deveríamos incluir no mesmo pacote a noção de identidade enquanto item lógico, da identidade que aparece em critérios de identidade? Se possível, trataremos dessa questão em (3.1).

Em resumo, vimos que Béziau (2013) afirma que o método de Quine não trata da identidade, mas sim da identidade de Leibniz, pois para tratar da identidade ele deveria dar conta da identidade numérica, a relação binária que uma coisa tem apenas consigo mesma. Wiggins (2001) concorda com a ideia de que o método de Quine apenas capta indistinguibilidade, mas adiciona que o método apenas faria sentido se usasse uma intuição de segunda ordem. Além disso, Wiggins (2001) acrescenta que se um

[19] *'[...] everything is seen to depend on what predicates are added in order to force the desired truth-value upon the sentences involving the constructed predicate that is to be introduced in lieu of =. Suppose the appearances can only be saved if monadic and polyadic predicates presupposing identity or place–time individuation or thing-individuation are supplied. If so, it is upon the presence of these that the success of the elimination recipe will depend.'*

predicado adicionado ao método proposto por Quine fornece critérios de identidade, então o método só é satisfatório por pressupor aquilo que pretende eliminar. Perceba que, nessas abordagens, o operador $(=)$ é sempre entendido como referindo, ou coincidindo, com o que chamamos de identidade numérica. Chamarei essa abordagem de *representacionalista* com relação à identidade. O termo é tomado de empréstimo de (PEREGRIN, 2012), e de modo propositalmente vago, é usado para designar a perspectiva segundo a qual a significatividade dos termos da linguagem é condicionada ao fato de serem usados para referir a objetos com os quais nos confrontamos no mundo, ou por referirem a qualquer realidade extralinguística. Esses termos, de algum modo, *representam* aqueles objetos.

Ainda que hajam disputas sobre se o método de Quine é ou não satisfatório, ainda assim não estamos em posição de afirmar que a identidade não é eliminável. Na verdade, Quine não foi o único defensor de uma tese nesse espírito. Como veremos, seguindo uma sugestão de Wittgenstein, Hintikka (1956) e Wehmeier (2012) propuseram modos alternativos de lidar com identidade.

1.3.3 Hintikka & Wehmeier: uma abordagem tractatiana da identidade

Na proposição [5.53] do *Tractatus*, Wittgenstein propõe que enunciados de identidade deveriam ser expressos por meio da identidade de símbolos e não por um simbolo de identidade. Por exemplo, de acordo com sua abordagem deveríamos substituir sentenças como $\exists x \exists y (F(x,y) \wedge x = y)$ por $\exists x F(x,x)$, $\exists x \exists y (F(x,y) \wedge \sim x = y)$ por $\exists x \exists y F(x,y)$, e assim por diante. Em acordo com essa proposta, uma lista de paráfrases são encontradas no *Tractatus* onde fórmulas com ocorrência do simbolo de identidade são reescritas em uma notação em que o simbolo não aparece, o que supostamente seria suficiente para mostrar que o simbolo de identidade não é um constituinte essencial. No entanto, diferentemente de Quine, Wittgenstein não fornece um método a ser seguido. Apenas posteriormente, com os trabalhos de Hintikka (1956), essa visão adquiriu sua implementação. Atualmente, Wehmeier tem argumentado (WEHMEIER, 2012) e fornecido recursos formais (WEHMEIER, 2004) em favor desta tese.

Hintikka (1956, p. 226) propôs uma distinção entre dois modos como podemos interpretar as variáveis de uma linguagem formal. O modo padrão como variáveis são usadas na lógica clássica de primeira ordem é a chamada interpretação *inclusiva*, onde é permissível que a diferentes variáveis seja atribuído o mesmo valor. Por exemplo, a sentença

(1c) $\exists x \exists y (Ama(x,y))$

embora use variáveis distintas, pode apenas ser a formalização em primeira ordem da sentença ‘Alguém ama alguém’, que contempla o caso onde os valores de x e y coincidem, ou seja, a sentença é satisfeita mesmo no caso onde um indivíduo ama a si mesmo. Caso quiséssemos expressar a ideia de que os indivíduos que se amam são diferentes, isto é, que 'Alguém ama outro alguém', a alternativa é usar a identidade, produzindo a sentença

(1d) $\exists x \exists y (Ama(x,y) \wedge \sim (x = y)$

Quando não é permitido que o valor de diferentes variáveis coincidam, então, de acordo com (HINTIKKA, 1956) estamos usando uma interpretação *exclusiva* das variáveis. A diferença pode ser notada com o exemplo da sentença 'Alguém ama alguém' que na interpretação exclusiva das variáveis acaba por se tornar

(1e) $\exists x (Ama(x,x)) \vee \exists x \exists y (Ama(x,y))$

ao passo que a sentença 'Alguém ama outro alguém' seria formalizada nessa mesma interpretação, exatamente como (1c) acima. Com o uso da interpretação exclusiva das variáveis, Hintikka (1956) propôs um sistema formal similar a LPO em que a consequência básica é uma linguagem 'livre' da identidade. A partir desse *insight*, e utilizando uma versão aperfeiçoada desse sistema, Wehmeier (2012) o tem apresentado sob o nome de W-lógica.

Como Wehmeier (2012) ressalta, a principal característica da W-lógica é a de que se uma fórmula envolve algum quantificador vinculado a uma variável 'x', então todos os objetos denotados por constantes individuais ou os valores de variáveis livres que ocorrem nessa fórmula são excluídos como possíveis valores da variável 'x' ligada ao quantificador. Consistentemente, uma fórmula como, por exemplo, $\exists y(Rxy)$ é W-verdadeira quando o valor de 'x' não coincide com o valor de 'y', i.e., quando há um objeto que é diferente daquele que é valor de 'x' e que está relacionado por R com o objeto que é valor de 'y'. De modo similar, $\exists x \exists y (Px \wedge Py)$ é verdadeira na W-lógica quando pelo menos dois objetos são Ps. Como é fácil perceber, aqui vale o dito wittgensteiniano de que à diferentes símbolos atribui-se diferentes objetos, diferente da $LPO_=$ onde os valores das variáveis é determinado de forma independente umas das outras.

Quais as vantagens dessa abordagem? De acordo com Hintikka, em termos de expressividade, não há diferença entre $LPO^=$ e a W-lógica, embora na W-lógica a identidade não possui lugar no conjunto do vocabulário lógico. Note que fórmulas que envolvem a identidade como

(1f) $\forall x (Fx \rightarrow x = y)$

e

(1g) $\exists x (\sim x = y \wedge Fx)$

na W-lógica se tornam, respectivamente,

(1f') $\forall x(\sim Fx)$

e

(1g') $\exists x(Fx)$

Anteriormente apresentamos algumas sentenças do português que são formalizadas em lógica de primeira ordem com o uso da identidade. Entretanto, essas sentenças, repetidas aqui para a conveniência do leitor,

(1) Pelo menos três pessoas leram o texto,

(2) Maria comprou no máximo dois livros,

(3) O autor de *A revolução dos bichos* é jornalista,

são formalizadas na W-lógica como,

(1") $\exists x \exists y \exists z \exists u(Rxu \wedge Ryu \wedge Rzu))$

(2") $\exists x \exists y(Cmx \wedge Cmy) \wedge \sim \exists x \exists y \exists z(Cmx \wedge Cmy \wedge Cmz)$

(3") $\exists x(Ax \wedge \forall y(\sim Ay) \wedge Jx)$

não envolvendo, desse modo, a identidade. Caso queiramos expressar correferencialidade entre termos singulares, como o caso de nomes próprios Wehmeier (2012) introduz um operador para o predicado binário ($\equiv$), que forma sentenças atômicas como '$c \equiv d$' significando que 'c e d co-referem'. Contudo, Wehmeier observa que esse operador pode ser entendido como uma abreviação para

$$\exists x(ref(`c', x) \wedge ref(`d', x)),$$

onde 'ref' é a relação de referência. Assim, a formalização de uma sentença como

(1h) Hesperus é Phosphorus

é simplesmente

(1h') h $\equiv$ p

significando que

(1h”) Existe um objeto x tal que ‘Hesperus’ refere a x e ‘Phosphorus’ refere a x.

Penso que deveríamos levantar a seguinte suspeita. Sempre que chegamos a inferir um enunciado de identidade como ‘Hesperus é Phosphorus’ o que queremos dizer é, na verdade, que os dois nomes denotam o mesmo objeto? Em outras palavras, afirmações de identidade são apenas afirmações metalinguísticas? Não penso que isso seja sempre o caso e a razão para esse posicionamento será apresentado em ‘Sentido é Referência?’, mais à frente. Aqui é suficiente notar que embora os dispositivos explicados acima possam conduzir uma espécie de dispensabilidade da identidade com relação à lógica de primeira ordem isso, por si só não tem a força de depor contra a logicidade da identidade. Hintikka propõe algumas observações nesse sentido.

> Espero mostrar que não é correto dizer (como Russell tem feito) que Wittgenstein tentou prescindir da noção de identidade. O que um uso sistemático de uma leitura exclusiva das variáveis equivale é a um novo modo de lidar com a noção de identidade em um sistema de lógica formalizado.
>
> Por outro lado, não vejo completamente a superioridade atribuída por Wittgenstein a uma interpretação exclusiva das variáveis. Uma interpretação exclusiva das variáveis pode ser realizada de modo que nos forneça um novo modo de dizer exatamente as mesmas coisas que podíamos dizer antes. Nossa não conformidade experimental não nos habilita a fazer coisas que não podíamos fazer antes. O que podemos esperar que ela faça é produzir sugestões que de outro modo nós escassamente viríamos a pensar.
>
> Nem vejo quaisquer vantagens técnicas substanciais resultando de uma leitura exclusiva das variáveis. Em certas investigações especiais, uma interpretação exclusiva das variáveis pode ser mais conveniente do que uma inclusiva. Um caso no momento é a investigação sobre o que tenho chamado de formas normais distributivas. (HINTIKKA, 1956, p. 228) [20]

Claramente, Hintikka (1956) não encara sua estratégia como um modo de se abandonar a identidade, mas sim como um modo diferente de lidar com ela em primeira ordem. Sem a aparente superioridade da abordagem com uma W-lógica, a escolha de desse arcabouço fica por conta de um critério pragmático. Por outro lado, Wehmeier encara essa estratégia como uma rota para se ‘viver sem a identidade’ (WEHMEIER, 2012). Sua defesa é a de que há boas razões para sermos céticos com relação à natureza *binária* da

[20] *‘I hope to show that it is not correct to say (as Russell has done) that Wittgenstein tried to dispense with the notion of identity. What a systematic use of an exclusive reading of variables amounts to is a new way of coping with the notion of identity in a formalized system of logic.’ ‘On the other hand, I do not quite see the superiority ascribed by Wittgenstein to an exclusive interpretation of variables. An exclusive interpretation of variables can be carried out so that it gives us a new way of saying exactly the same things we could say before. Our experimental nonconformity does not enable us to do things we could not do before. What we may hope it to do is to yield suggestions of which we otherwise scarcely have come to think.’‘Nor do I see any substantial technical advantages resulting from an exclusive reading of variables. In certain special investigations, an exclusive interpretation of variables may be more convenient than the inclusive one. A case in point is the inquiry into what I have called distributive normal forms.’*

identidade. Em sua empreitada o mote principal é fornecer uma justificativa para a tese wittgensteiniana de que a identidade não é uma relação genuína, ou no famoso dito, que 'dizer de *duas* coisas que elas são idênticas é sem sentido, e dizer que *uma* coisa que ela é idêntica consigo mesma não é dizer nada [5.5303]'

A primeira questão que Wehmeier levanta é a seguinte. O que significa dizer que uma relação é binária, ao invés de unária? Para responder a essa questão Wehmeier (2012, pg. 768) propõe o chamado Princípio Wittigenstainiano de Aridade, que diz que

> (**PWA**): a aridade de uma relação **R** é o número máximo de objetos que podem possivelmente estar relacionados por **R**;

Por exemplo, 'riqueza' de acordo com (PWA) é unária e, portanto, se trata de uma propriedade. Por outro lado, 'amar' é uma relação binária, pois pode relacionar simultâneamente dois objetos. Ainda, 'estar entre' é uma relação ternária, fato que (PWA) comporta. Como a identidade numérica apenas aceita que um objeto por vez a satisfaça, Wehmeier conclui que a identidade não é uma relação genuína.

> O número máximo de objetos que possivelmente podem ser relacionados pela identidade numérica é um, porque duas coisas nunca podem ser idênticas (de outro modo não seriam duas). Portanto, pelo PWA, identidade numérica é unária, i.e., uma propriedade ao invés de uma relação própria. [21](WEHMEIER, 2012, pg. 768)

Além de propor o número máximo de objetos que uma relação pode satisfatoriamente relacionar como o indicativo da aridade, Whemeir propõe que o número possível de objetos que podem vir a falhar em estar relacionados também deveria ser considerado ao caracterizar a aridade de uma relação.

> [...] pois a identidade certamente falha ao relacionar Frege, Russell, e Wittgenstein, mas ninguém pensa que isso a torna ternária. Para evitar este problema, o amigo da identidade teria que insistir que a aplicação da identidade a dois objetos, ainda que nunca bem-sucedida, é em algum sentido 'bem-formada', enquanto que ela é 'mal-formada' quando três ou mais objetos estão envolvidos. (WEHMEIER, 2012, pg. 769) [22]

Wehmeir fornece uma análise de possíveis tentativas para contornar o (PWA), dentre as quais está a de adotar uma perspectiva conjuntística, i.e., usando teoria dos

[21] *The maximal number of objects that can possibly be related by objectual identity is one, because no two things can ever be identical (otherwise they wouldn't be two). Therefore, by WAP, objectual identity is unary, i.e. a property, rather than a proper relation.*

[22] *[...]for identity certainly fails to relate Frege, Russell, and Wittgenstein, but nobody thinks that this makes it ternary. To obviate this problem, the friend of identity would have to insist that application of identity to two objects, though never successful, is in some sense 'well-formed', whereas it's ill-formed when three or more objects are concerned.*

conjuntos para fornecer uma abordagem alternativa com relação a aridade de relações. Reelaborando um princípio de aridade com esse pano de fundo, um princípio conjuntístico de aridade (PCA) poderia afirmar que

> (**PCA**): a aridade de uma relação **R** (enquanto conjunto) é simplesmente o número n tal que todos os membros de **R** são n-uplas.[23]

Seguindo o (PCA), com a disponibilidade da diagonal $\Delta_D = \{< x, x >: x \in D\}$ de um conjunto D, poderíamos afirmar que a identidade, enquanto Δ_D é uma relação binária, que todo objeto em D tem consigo mesmo e com nada mais. Entretanto, Wehmeier argumenta que a resposta mais óbvia a essa alternativa é a de que relações *não* são conjuntos. A primeira afirmação que apoia essa tese é a da constatação de que as expressões que são usadas para se referir a conjuntos não ocorrem, em sentenças bem formadas, na posição reservada a expressões relacionais como ($=$) e ($\in$). Se considerássemos ($\in$) uma relação-enquanto-conjunto, afirmações como '$a \in S$' deveriam ser entendidas como a simples junção de nomes para objetos, incluindo conjuntos. A intenção do argumento é ressaltar que para que as sentenças da teoria dos conjuntos façam sentido, ($\in$) deveria ser entendida independente da construção de relações enquanto um conjunto de n-uplas. Ou seja, relações são uma coisa e conjunto de n-uplas outra. Entretanto, Wehmeir qualifica esse argumento como 'muito apressado', pois ainda que não sejam relações, conjuntos de n-uplas simulam satisfatoriamente para diferentes propósitos relações n-árias. E, seguindo essa linha, Wehmeir argumenta que seria ao menos concebível que houvesse uma correspondência um-a-um entre relações n-árias e conjuntos de n-uplas, que sendo o caso, forneceria o conjunto de pares $< x, x >$ 'como evidência para existência de uma relação de identidade objetual binária' (WEHMEIER, 2012, pg. 770). Contudo, essa tese da correspondência um-a-um entre relações e conjuntos é resistida com o seguinte argumento.

Grosso modo, o desafio levantado é o de que não há correspondência entre relações e conjuntos, uma vez que a 'abordagem conjunto-teórica implica a distinção de qualquer relação não simétrica da sua inversa' (WEHMEIER, 2012). Por exemplo, a relação de amar A corresponderia ao conjunto de pares ordenados $\{< x, y > |x \ ama\ y\}$, que deve ser distinguida de 'ser amado' que é a inversa de A (em símbolos A^{-1}), que corresponde ao conjunto $\{< x, y > \mid x \ amado\ por\ y\}$. O problema então é que do ponto de vista ontológico há apenas uma relação, a de amar, enquanto que em termos conjuntísticos temos duas, a saber, A e A^{-1}. [24] Wehmeier então conclui que

> Esta observação mina a pressuposição de que deveria haver uma correlação um-a-um entre relações n-árias e classes de n-uplas ordenadas.

[23] Wehmeir não usa esse nome, mas a definição pode ser encontrada em seu texto. (cf. (WEHMEIER, 2012, pg. 770))

[24] Na verdade, Wehmeier endossa a perspectiva de Kit Fine de que relações são neutras e que os lugares para argumentos em uma relação constituem entidades específicas sobre as quais as relações não impõem qualquer ordem. Os detalhes podem ser encontrados em (FINE, 2000).

> Existem, em certo sentido, mais conjuntos de tuplas do que de relações, como atestado pelo fato de que os conjuntos $\{< x, y > |x \textit{ ama } y\}$ e $\{< x, y > | \ x \textit{ amado por } y\}$ correspondem a mesma relação; em outras palavras, ao menos alguns conjuntos de tuplas são artefatos do modo como representamos relações dentro da teoria dos conjuntos. Mas então, é inteiramente concebível que a relação de identidade, a classe de pares $< x, x >$ deveria ela mesma ser um tal artefato, e que fosse mapeada à mesma relação como a classe de 1-upla <x>. (WEHMEIER, 2012, pg. 771) [25]

Em síntese, o argumento de Wehmeir é o de que ao endossar o (PCA) podemos estar tomando características notacionais, contingentes, e imputando essas características como aspectos essenciais das relações.

Por fim, outro argumento que Wehmeier discute trata da noção de *diferença*. Como seria de se esperar, via (PWA), a relação de diferença, que podemos entender como 'a relação que um objeto mantém com qualquer outro, menos consigo mesmo', é considerada binária. Ora, poderíamos objetar que, como a identidade é unária de acordo com (PWA), e uma vez que a diferença é o complemento da noção de identidade, a diferença também deveria ser unária. Wehmeier considera um argumento similar em favor da natureza binária da identidade. Ora, via (PWA) a diferença é binária, visto que a identidade é complemento da diferença, a identidade também deveria ser binária.

A resposta de Wehmeier a objeção mencionada é notar que a noção de complemento é tipicamente relativa a uma domínio que funciona como plano de fundo. Contudo, esse domínio em geral não é unicamente determinado por um dado conjunto sob consideração. Com o exemplo que nos interessa, Wehmeir levanta a questão de que domínio deveríamos considerar quando queremos determinar o complemento da relação de diferença? Uma resposta seria considerar que o domínio consiste de todos os pares $< x, y >$ em que x pode ser diferente ou igual a y. Segundo Wehmeir essa não seria a única alternativa.

> Dado que a diversidade é introduzida como o conjunto de pares de dois elementos <x, y>, e que sua aplicação a pares de um elemento <x, x> é por isso excluído sob fundamentos definicionais, parece igualmente natural considerar seu complemento relativo como o conjunto de todos os pares de dois elementos. Mas então o complemento da diversidade é a relação vazia. Assim, não é tão claro que o complemento da diversidade é de fato a identidade.(WEHMEIER, 2012, pg. 771)

Ao que parece a restrição de Wehmeier em escolher um domínio em que os pares $< x, y >$ em que x podem coincidir com y é de que o que deveríamos escolher

[25] *This observation undercuts the presumption that there should be a one-to-one correlation between n-ary relations and classes of ordered n-tuples. There are, in a sense, more sets of tuples than of relations, as witnessed by the fact that the sets $\{< x, y > | \ x \textit{ loves } y\}$ and $\{< x, y > | \ x \textit{ is loved } y\}$ correspond to the same relation; in other words, at least some sets of tuples are artefacts of the way we represent relations within set theory. But then it is entirely conceivable that the identity relation, the class of pairs $< x, x >$ should itself be such an artefact, and that it maps to the same relation as the class of 1-tuples <x>.*

como complemento são conjuntos de pares $< x, y >$ não diferentes. Mas como pares não diferentes não retornariam pares, mas sim indivíduos, a escolha deveria ser resistida. Não é claro, no entanto, se esse é um passo legítimo. É importante ressaltar que o próprio critério de aridade **(PWA)** não é imune a objeções. Existem relações intuitivamente legítimas que uma coisa tem apenas consigo mesma e nada mais, mas que ainda sim *não* se tratam de simples propriedades. Por exemplo, 'suicídio' é o tipo de coisa que um indivíduo tem apenas consigo mesmo, mas que não se trata de uma de suas propriedades. Nesse caso, **(PWA)** falha ao analisar a aridade dessa relação. [26]

De forma resumida, a abordagem de Hintikka (1956) e que Wehmeier (2012) endossa, consiste primariamente em propor uma linguagem livre da identidade como Wittgenstein sugeriu. Wehmeier (2012) vai além ao propor que deveríamos, inclusive, ser céticos com relação à identidade, entendida também como uma relação binária que indivíduos têm apenas consigo mesmo. A natureza binária da identidade é negada com base no princípio wittgensteinianode aridade (PWA), concluindo que a identidade é na verdade, uma propriedade. Entretanto, ressalto aqui que, mesmo em seu ceticismo, Wehmeier (2012) assume que (=) é a contraparte formal de algo que tradicionalmente tem sido tratado como uma relação binária. Ou seja, mesmo aqui se reafirma o caráter representacionalista: possuímos um item na linguagem cuja a significatividade, ou no presente caso, cuja logicidade, depende de ser entendido como referindo a algo extralinguístico, nesse caso a uma relação binária, que se Wehmeier (2012) estiver correto é, na verdade, uma propriedade. Assim propomos a seguinte questão: *Seria possível abordar a logicidade da identidade sem endossar o caráter representacionalista que se faz presente nas disputas de sobre sua logicidade?*. Certamente há essa alternativa. É o que chamaremos aqui de 'caracterizações inferenciais'. Em linhas gerais, essa alternativa busca caracterizar o sentido de uma constante lógica a partir das regras de inferência. Trataremos de algumas dessas abordagens no capítulo a seguir.

*

Começamos ressaltando a importância das constantes lógica para as discussões em filosofia da lógica. Como foi exposto, os critérios intuitivos que parecem conduzir nossas escolhas sobre o que conta como lógico como, por exemplo, a tópico neutralidade, são insuficientes para resolver o problema. Ao invés de tratar da questão mais geral sobre quantas e quais são as constantes lógicas, algo que envolveria uma série de outros tópicos que extrapolariam os limites deste trabalho, decidimos analisar a argumentação em favor da logicidade de uma noção aparentemente simples: a identidade. Como pretendemos estabelecer, a tese de indispensabilidade da identidade é demasiado fraca para sustentar a sua logicidade. Além disso, a própria discussão repousa em um viés metafísico que não

[26] Agradeço ao Prof. Guido Imaguire por notar este ponto.

precisa de todo ser endossado. Assim, creio que se abandonarmos esse viés, poderemos fornecer algum argumento em favor da logicidade da identidade.

A casa do Espelho

2 Caracterizações Inferenciais

2.1 Introdução

Como afirmado na primeira parte deste trabalho (1.2), no nível intuitivo a tópico neutralidade é insuficiente para dar conta da demarcação das constantes lógicas. O que chamamos de 'caracterizações inferenciais' das constantes lógicas é a tentativa de captar a noção de 'tópico neutralidade' a partir da ideia de que as constantes são ingredientes que fazem parte de qualquer coisa que venhamos a chamar de inferência válida.

Em linhas gerais, as propostas apresentadas a seguir compartilham a visão de que as constantes lógicas são expressões que podem ser caracterizadas por um conjunto de regras inferenciais.

Os princípios em que as constantes lógicas estão envolvidas nos ajudam a justificar os passos em deduções. Em uma dedução nosso objetivo é chegar a conclusão de um argumento a partir de um conjunto de sentenças que servem como base, de modo que possamos evitar qualquer tipo de lacuna nesse processo. Seguindo Shapiro (2014), dizemos que uma dedução é livre destas lacunas quando cada passo intermediário pode ser obtido por meio das asserções que servem como base de acordo com alguns princípios de inferência até que se chegue a conclusão. Por exemplo, uma possível dedução para

> (2a) Não é o caso que David está tocando ukulele e dormindo; Mas, David está tocando ukulele. Portanto, David não está dormindo.

poderia ser a seguinte. 'Assuma que (*i*) *não* é o caso que David está tocando ukulele *e* dormindo, e também que (*ii*) David está tocando ukulele. Suponha, *por absurdo que* (*iii*) David está dormindo. Assim, de (*ii*) e (*iii*) podemos inferir que (*iv*) David está tocando ukulele *e* David está dormindo. Mas, de (*i*) e (*iv*) obtemos uma contradição. Logo, *não* é o caso que David está dormindo.'

É importante enfatizar que a demonstração acima não depende do assunto sobre o qual as sentenças tratam. Podemos produzir a mesma cadeia argumentativa usando apenas as sentenças que compõem o esquema (3), algo nos seguintes termos. 'Assuma que (*i*) *não* (p *e* q) e que (*ii*) p. Suponha, *por absurdo* que (*iii*) q. Assim, de (*ii*) e (*iii*) podemos inferir que (*iv*) p *e* q. No entanto, de (*i*) e (*iv*) obtemos uma contradição. Logo, *não* q'. Mais uma vez, é o significado das constantes lógicas que assegura a validade do argumento. Em particular, o significado do termo '*e*' permite a transição de (*ii*) e (*iii*) a (*iv*). A ideia subjacente a essa regra de inferência é que se estamos em condições de asserir uma sentença p e também possuímos razões para asserir q então podemos asserir "p e q". Também usamos a estratégia de demonstração conhecida como raciocínio por absurdo, uma regra que nos permite inferir a negação de uma suposição caso possamos derivar a partir dela uma contradição.

Grosso modo, as características inferenciais são a tentativa de exprimir os princípios básico nos quais as constantes lógicas estão envolvidas. Quase sempre essa abordagem é conduzida dentro de um arcabouço lógico determinado. Por exemplo, caso escolhêssemos trabalhar com o cálculo de dedução natural, as regras características da conjunção seriam as seguintes regras:

$$(\wedge_I)\ \frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

$$(\wedge_{E_1})\ \frac{A \wedge B}{\mathrm{A}}$$

$$(\wedge_{E_2})\ \frac{A \wedge B}{\mathrm{B}}$$

Como Gomez-Torrente (2002) observa, em meio a discussão do problema das constantes lógicas, raramente são expostos os critérios que uma boa teoria das constantes deveria satisfazer. Entretanto, MacFarlane (2015) apresenta alguns requisitos que uma teoria que busca caracterizar as constantes lógicas por meio das regras de inferência deveria satisfazer para se tornar mais precisa. Em resumo, as seguintes decisões deveriam ser feitas:

- Que formalismo dedutivo deveríamos escolher? Dedução Natural ou Cálculo de Sequentes?
- Caso o cálculo de sequentes seja escolhido, deveríamos permitir substrutura? Ou seja, sistemas em que nem todas as regras estruturais, tal como apresentadas por Gentzen, são válidas. Ainda, deveríamos trabalhar com conclusão múltipla? Quais regras estruturais?
- Caso o cálculo de dedução natural seja escolhido, será a regra de introdução ou eliminação que caracteriza as constantes?
- A estrutura subproposicional dever ser permitida para dar conta de quantificadores?
- Quando uma regra é puramente inferencial?

A despeito desses tópicos um tanto quanto restritos, existem questões de cunho mais geral. 'Caracterizações' é um termo neutro para as perspectivas divergentes sobre o papel das regras de inferência. Seguindo a caracterização fornecida em (MACFARLANE, 2015), as regras são vistas de dois modos diferentes, a saber, (i) como determinando o significado das constantes lógicas ou (ii) determinando seu valor semântico (referência).

- [Determinação de sentido] Uma constante # é caracterizável por um conjunto de regras ρ se, e somente se, ser governada por ρ é suficiente para fixar o seu sentido: isto é, alguém que pode compreender o sentido de # simplesmente por aprender que ela é governada por ρ.

- [Determinação de valor semântico] Uma constante # é caracterizável por um conjunto de regras ρ se, e somente se, ρ é suficiente para fixar o valor semântico de #.

Como representante da determinação de sentido apresentaremos em (2.2) as teses de (POPPER, 1947), e como abordagem não comprometida com a noção de sentido trataremos da posição de (DOŠEN, 1989). Mais especificamente, em 'Abrindo mão de pressupostos: Popper sobre a Lógica' apresentaremos a tese popperiana de que as constantes lógicas são aqueles itens para os quais se podem fornecer *definições inferenciais* que são responsáveis por dar o seu sentido. Essa seção é seguida por uma avaliação da perspectiva apresentada. Nosso foco, no entanto, será apenas o de notar que ainda que hajam problemas com as teses centrais da teoria, para o caso que nos interessa, a saber, da identidade, a sugestão é a de que a noção de substituição é usada para justificar a logicidade da identidade. Com 'Interlúdio: o Cálculo de Sequentes' pretendemos apenas familiarizar o leitor com algumas noções empregadas na seção seguinte como, por exemplo, as de *regras estruturais*, *sequentes*, etc. Em seguida em 'Došen e Constantes lógicas como sinais de pontuação' apresentamos a proposta de Kosta Došen, segundo a qual, constantes lógicas são aqueles itens que internalizam na linguagem objeto características estruturais das deduções.

2.2 Abrindo mão de pressupostos: Popper sobre a Lógica

Em bora seja popularmente conhecido como filósofo da ciência, Karl Popper também dedicou parte de seu tempo a investigações no campo da lógica. Em (POPPER, 1946; POPPER, 1947), Popper apresenta algumas de suas reflexões em torno da noção de consequência lógica. Mais precisamente, seu objetivo era propor uma noção de consequência livre de um dos pressupostos presentes na definição apresentada por Tarski, a saber, a divisão entre termos lógicos e não lógicos. Para dar conta do problema Popper (1947, pg. 13) defende que devemos ter em mente o fato de que o tópico central da lógica é 'a teoria da inferência'. Popper começa sua análise pela noção de consequência lógica. Sua definição espelha aspectos em semelhantes àqueles presentes na definição tarskiana.

Definição 2.2.1 (Consequência Lógica) *Uma inferência é válida se, e somente se, todas as suas interpretações que preservam a forma em que as premissas são todas verdadeiras têm uma conclusão verdadeira.(POPPER, 1946, pg. 264)*

A noção de interpretação é entendida aqui como uma tradução entre linguagens. Uma interpretação que preserva a forma é aquela em que (i) se preserva o significado dos signos formativos (constantes lógicas) e (ii) a recorrência das expressões descritivas (não lógicas) (POPPER, 1946, pg. 258). Em resumo, uma inferência é validade se, e somente se, toda inferência com a mesma forma lógica em que as premissas são verdadeiras a conclusão também é.

Como se pode observar essa definição de inferência válida também se baseia na distinção entre expressões lógicas e não lógicas (signos formativos e descritivos em termos popperianos), isso explica a preocupação de Popper em lidar com o problema. Seria possível formular uma noção de inferência válida sem que ela dependesse da *suposição* de que os itens da linguagem podem ser divididos em lógicos e não lógicos? A solução sugerida por Popper é a seguinte. Algumas inferências são válidas independentemente da forma lógica das sentenças envolvidas. Inferências que satisfazem esse atributo são chamadas de inferências *absolutamente válidas.* Com o auxílio dessas regras absolutamente válidas as constantes lógicas são apresentadas em termos das *definições inferenciais,* que envolvem apenas o conceito de dedutibilidade. Popper pretende estabelecer que (i) é possível definir a noção de consequência sem *pressupor* a distinção entre termos lógicos e não lógicos e que (ii) as inferências que envolvem o uso das constantes lógicas podem ser reduzidas àquelas independentes da forma lógica. Os detalhes dessa teoria serão apresentados adiante.

Teoria Geral da Derivação

Popper (1946) propõe uma *teoria geral da derivação* onde são expostas algumas das regras primitivas que estão no alicerce da teoria desenvolvida. É importante notar que Popper considera lógica como uma matéria puramente metalinguística. Esse fato ficará mais claro quando expusermos as definições inferências das constantes lógicas. Primeiramente, apresentaremos a notação utilizada no que se segue.

As letras $A, B, C, \ldots$ são variáveis para sentenças de uma linguagem não especificada; o simbolo $\vdash$ designa o conceito de dedutibilidade, enquanto que $\dashv\vdash$ é a abreviação para interdedutibilidade, definida como '$A \dashv\vdash B$ se, e somente se, $A \vdash B \quad \& \quad B \vdash A$'. A substituição de variáveis é representado como $A\binom{x}{y}$ que significa 'o resultado de substituir x por y na função sentencial A'. A expressão $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ é lida como 'a sentença B pode ser derivada das sentenças $A_1, A_2, \ldots, A_n$'. Os símbolos $\Rightarrow$, &, serão apenas abreviações das expressões de implicação e conjunção da metalinguagem, usados aqui por mera conveniência. [1]

O ponto de partida da teoria são as inferências absolutamente válidas, definidas da seguinte maneira.

Definição 2.2.2 (inferência absolutamente válida) *Uma inferência é absolutamente válida se, e somente se, toda interpretação que preserva sentenças (statement-preserving) em que as premissas são verdadeiras a conclusão é verdadeira.*

Em linhas gerais, uma interpretação que preserva sentenças é aquela em que se respeita a recorrência de sentenças como um todo, isto é, sem averiguar estrutura interna (POPPER, 1946, pg. 254). As inferências absolutamente válidas propostas por Popper são as seguintes:

Princípio de Reflexividade Generalizado:

$$A_1, \ldots, A_n / A_i \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{2.1}$$

Princípio de Transitividade Generalizado:

$$\begin{aligned} &(A_1, \ldots, A_n \vdash B_1 \ \& \ldots \& \ A_1, \ldots, A_n \vdash B_m) \\ &\Rightarrow (B_1, \ldots, B_m \vdash C \Rightarrow A_1, \ldots, A_n \vdash C) \end{aligned} \tag{2.2}$$

E secundariamente:

$$A\binom{x}{x} \dashv\vdash A \tag{2.3}$$

$$x = y \Rightarrow A \vdash A\binom{x}{y} \quad \& \quad A\binom{x}{y} \vdash A \tag{2.4}$$

$$A \dashv\vdash B \Rightarrow A\binom{x}{y} \dashv\vdash B\binom{x}{y} \tag{2.5}$$

Essas são as inferências cuja a validade independe da forma lógica das sentenças envolvidas. Ainda que aparentemente triviais, Popper argumenta em favor de sua validade. Como exemplo, tomemos o princípio de reflexividade expresso na sentença (2.1) que diz 'das sentenças $A_1, \ldots, A_n$', conclui-se A_i, onde A_i é um dos itens que ocorrem previamente nas premissas. Suponha que existe um contra-exemplo para (2.1), i.e., que

[1] Popper usa uma notação completamente diferente da que usamos aqui. Como o leitor poderá observar em alguns trechos citados abaixo, a noção de dedutibilidade é representada por '/', interdedutibilidade como '//', e diferentes simbolos para os conectivos lógicos como, por exemplo, $\frown$ para a conjunção e $\smile$ para a disjunção.

haja uma interpretação de (2.1) que preserva a recorrência das sentenças onde as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa. Como, de acordo com (2.1), A_i deve ser um dos elementos da premissa, então, nesta interpretação nem todas as premissas são verdadeiras. Portanto, não existe um contra-exemplo para (2.1). O mesmo raciocínio pode ser aplicado às outras regras.

(2.2) é o princípio de *transitividade* , afirma que 'se de um número n de premissas um número m se segue e, se C é dedutível desse número m de sentenças, então C é dedutível das n sentenças anteriores.'

De (2.3) a (2.5) obtemos algumas regras de substituição. Popper toma essas regras como regras lógicas, uma vez que são absolutamente válidas. Provavelmente, a única regra estranha seja (2.4). Nela, Popper toma 'x' e 'y' como 'nomes variáveis de variáveis', isso quer dizer que no enunciado 'x = y' o que se diz é que ambos nomeiam uma mesma variável, o que acaba por ter o mesmo efeito que (2.3).

Popper encontra nas inferências absolutamente válidas uma saída viável para o problema de uma noção de consequência dependente da divisão entre termos lógicos e não lógicos. Todavia, as inferências absolutamente válidas são apenas uma pequena fração de inferências válidas. Restam as inferências que se justificam a partir do papel das constantes lógicas. A teoria geral de derivação servirá como base para lidar com essa questão. Para isso, a teoria é estendida de modo a lidar com quaisquer outros tipos de inferências. É desse ponto que Popper propõe as *definições inferenciais*.

Definições Inferenciais & logicidade

Em uma definição inferencial as constantes lógicas são definidas a partir de seu comportamento lógico característico, utilizando como recurso certas condições que envolvem a relação de consequência. Ao invés de abordar as inferências em termos de 'negação', 'conjunção', etc., Popper propõe falar em seus respectivos importes lógicos. Com o uso das inferências absolutamente válidas Popper (1946, pg. 282) pretende definir não que 'A é a conjunção de B e C' mas que 'A tem a mesma força lógica que a conjunção de B e C *seja lá qual for a forma lógica que as sentenças* A, B *e* C *possam ter*'. Consideremos o caso da conjunção.

De acordo com Popper, uma linguagem possui a operação de conjunção se, e somente se, para quaisquer sentenças A e B há uma terceira sentença C tal que C é logicamente equivalente a A e B tomadas conjuntamente. Essa equivalência é justificada se as seguintes inferências são o caso.

$$C \vdash A \tag{2.6}$$

$$C \vdash B \tag{2.7}$$

$$A, B \vdash C \tag{2.8}$$

Dessas regras é extraída a seguinte definição.

Definição 2.2.3 *A sentença C é uma conjunção de duas sentenças A e B se, e somente se, $C \vdash A, C \vdash B$ e $A, B \vdash C$.*

Após apresentar uma reformulação das regras de (2.7) a (2.8) em que C é substituído por $A \wedge B$, a saber,

$$A \wedge B \vdash A \tag{2.9}$$

$$A \wedge B \vdash B \tag{2.10}$$

$$A, B \vdash A \wedge B \tag{2.11}$$

Popper afirma que $A \wedge B$ não é nada mais que uma,

> nova etiqueta, e que apenas as três regras dão à etiqueta u sentido, por relacioná-la à dedutibilidade Um alerta deveria ser aqui dado: como o temos introduzido, o simbolo '$\frown$' não tem de todo sentido separado. Seria um erro considerá-lo como uma abreviação do termos 'e', talvez mesmo como uma abreviação alternativa a &. Nós nem mesmo assumimos que a linguagem que estamos discutindo - a linguagem que nossas sentenças a, b, c,... pertencem - possuem um sinal para ligar sentenças em conjunções. [2]

> [...] dizemos que $a \frown b$ é *uma* conjunção de a e b, ao invés de que ela é *a* conjunção de a e b. Mas mesmo que possamos ter muitas conjunções em uma linguagem elas devem todas ser equivalentes se satisfazem nossas regras [...]; A conclusão de tudo isso é que o que temoos definido não é tanto a conjunção de a e b mas a força lógica precisa (ou o importe lógico) de qualquer sentença c que é igual em força a conjunção de a e b. (POPPER, 1947, pg. 208, ênfase no original) [3]

[2] *new label, and that only the three rules give the new label a meaning, by relating it to deducibility. A warning should be given here: as we have introduced it, the symbol '$\frown$' has no separate meaning at all. It would be a mistake to consider it as an abbreviation of the word 'and', perhaps even as an alternative abbreviation to &. We do not even assume that the language we are discussing-the language to which our statements a, b, c,... belong possesses a special sign for linking statements into conjunctions.*

[3] *[...] we say that $a \frown b$ is a conjunction of a and b, rather than that it is the conjunction of a and b. But however many conjunctions of a and b we may have in a language, they all must be equivalent if they satisfy our rules[...]; The upshot of all this is that what we have defined is not so much the conjunction of a and b but the precise logical force (or the logical import) of any statement c that is equal in force to a conjunction of a and b.*

Como Popper argumenta, uma linguagem pode possuir diferentes meios para expressar a conjunção e seria preciso mencionar em cada caso que uma dada sentença é a conjunção de A e B. Em face disso, Popper introduz '$A \wedge B$' como uma etiqueta para a conjunção de A e B. Isto sugere a distinção entre conjunção enquanto item linguístico, por um lado, e como operação lógica por outro. Isso fica claro quando a seguinte definição é oferecida como reelaboração da definição (2.2.3).

$$C \dashv\vdash A \wedge B \Leftrightarrow (C \vdash A \ \& \ C \vdash B \ \& \ A, B \vdash C). \tag{2.12}$$

De maneira similar a 2.2.3, 2.12 afirma que uma sentença C tem a força lógica da conjunção de A e B as condições à direita do bicondicional sejam satisfeitas.

Popper fornece as regras de inferência para o restante dos conectivos lógicos, listadas abaixo.

$$A \wedge B \vdash C \Leftrightarrow A, B \vdash C \tag{2.13}$$
$$A \vee B \vdash C \Leftrightarrow A \vdash C \ \& \ B \vdash C \tag{2.14}$$
$$A \vdash B \rightarrow C \Leftrightarrow A, B \vdash C \tag{2.15}$$
$$A \vdash B \ \leftrightarrow \ C \ \Leftrightarrow A, B \vdash C \ \& \ A, C \vdash B \tag{2.16}$$
$$\sim A, B \vdash \sim C \Leftrightarrow C, B \vdash A \tag{2.17}$$
$$A\binom{y}{x} \vdash \forall x \left(B\binom{y}{x}\right) \Leftrightarrow A\binom{y}{x} \vdash B\binom{x}{y} \tag{2.18}$$
$$\exists x \left(A\binom{y}{x}\right) \vdash B\binom{y}{x} \Leftrightarrow A\binom{x}{y} \vdash B\binom{y}{x} \tag{2.19}$$

Com as regras acima, um série de definições correspondentes são propostas. As definições são as seguintes:

$$A \dashv\vdash B \wedge C \Leftrightarrow (\forall C_1 : A \vdash \ C_1 \Leftrightarrow B, C \vdash \ C_1) \tag{2.20}$$
$$A \dashv\vdash B \vee C \Leftrightarrow (\forall C_1 : A \vdash \ C_1 \Leftrightarrow B \vdash \ C_1 \ \& \ C \vdash \ C_1) \tag{2.21}$$
$$A \dashv\vdash B \rightarrow C \Leftrightarrow (\forall A_1 : A_1 \vdash A \Leftrightarrow A_1, B \vdash C) \tag{2.22}$$
$$A \dashv\vdash \sim B \Leftrightarrow (\forall A_1, B_1 : A, A_1 \vdash B \rightarrow (A, A_1 \vdash B_1 \& A_1, B_1 \vdash B)) \tag{2.23}$$
$$A \dashv\vdash \forall x B y \Leftrightarrow (\forall C y : C y \vdash A \Leftrightarrow C y \vdash A\binom{x}{y}) \tag{2.24}$$
$$A \dashv\vdash \exists x B y \Leftrightarrow (\forall C y : A \vdash C y \Leftrightarrow A\binom{x}{y} \vdash C y) \tag{2.25}$$

No caso da identidade, Popper propõe duas definições.

$$A \dashv\vdash Idt(x,y) \Leftrightarrow \forall B : B \vdash A\binom{x}{y} \& \; A, B\binom{z}{x} \vdash B\binom{z}{y} \& A, B\binom{z}{y} \vdash B\binom{z}{x}. \quad (2.26)$$

$$A \dashv\vdash Idt(x,y) \Leftrightarrow \forall B : (A, B\binom{z}{x} \vdash B\binom{z}{y}) \& \; \forall C : (B, C\binom{u}{x} \vdash B\binom{u}{y}) \rightarrow B \vdash A \quad (2.27)$$

Acontece que essas definições não são nada intuitivas. Além disso Popper não oferece quaisquer indícios sobre como deveríamos compreender essa pretensa definição da identidade. A segunda é alegadamente uma correção à primeira. A única dica que temos é a de que essas regras devam de algum modo envolver a noção de substituição, como fica patente em ambos os casos.

Em resumo, são propostas regras de inferência que determinam o significado das constantes lógicas, de onde extraímos o que parece ser uma definição explícita e, a partir daí, as definições inferenciais. Notavelmente, as regras para as constantes não possuem uma forma determinada. Por outro lado, seguindo Schroeder-Heister (1984), podemos fornecer as formas gerais das definições explícitas e inferenciais, respectivamente

$$A \dashv\vdash L_{\#}(A, A_1, ..., A_n) \Leftrightarrow M(A, A_1, ..., A_n) \quad (2.28)$$

$$A \dashv\vdash \#(A, A_1, ..., A_n) \Leftrightarrow M(A, A_1, ..., A_n) \quad (2.29)$$

onde # é uma operação lógica arbitrária, $L_{\#}$ é um predicado metalinguístico, afirmando que A é uma #-conexão de $(A_1, ..., A_n)$ e $M(A, A_1, ..., A_n)$ é uma fórmula da metalinguagem.

Naturalmente, dessa abordagem podemos extrair um critério de demarcação das constantes lógicas. De fato, Popper propõe uma definição, apresentada abaixo.

Definição 2.2.4 (constante lógica) *Um signo # de uma linguagem L_1 é uma constante lógica se, e somente se, # pode ser definido por uma definição inferencial.*

Como Popper ressalta, as definições inferenciais desempenham o papel de tornar explícito que as regras de inferência para cada constante lógica são determinadoras de significado. O ganho em propor essa ferramenta é o de supostamente se obter uma justificação semântica para as regras presentes em sistemas formais. Como o trabalho foi dedicado e parece funcionar para o caso da lógica de primeira ordem, o que conta como lógico aqui são as constantes desse sistema. Popper conclui daí que forneceu uma justificação para a lógica, no seu todo.

Considerações sobre a proposta de Popper

Popper resumiu seu projeto de modo simples. O primeiro passo consistia em ‘ tomar o conceito de ‘consequência lógica’ como primitivo, para a partir daí tentar mostrar que signos lógicos ou formativos são aqueles que podem ser definidos com a ajuda desse conceito'(POPPER, 1947, pg. 1096). Apenas das definições inferenciais teríamos o edifício da lógica. Contudo, foi exatamente nesse elemento que Popper pode ver a ruína de sua própria abordagem. A maioria das objeções ao que Popper propôs se dirigem ao modo como as definições inferenciais são usadas na teoria. O primeiro grupo de objeções contra Popper podem ser agrupadas na seguinte declaração:

- *As definições inferenciais pressupõem a existência das constantes lógicas na linguagem;*

Como dito anteriormente, Popper fala em termos da 'força lógica' das constantes lógicas e não nelas mesmas pois considera que a análise lógica reside na metalinguagem. Entretanto, os limites entre linguagem e metalinguagem nem sempre são bem demarcados. Kleene (1948) observou que em certos contextos o limite entre uma e outra é ultrapassado de modo ilegítimo. Esse é o caso, por exemplo, na seguinte passagem.

> Dessa definição [2.12], podemos obter três regras [2.9, 2.10, 2.11 acima] do seguinte modo: se c e $a \frown b$ são substitucionalmente iguais, então: (1) c/a & c/b & $a, b/c$ (por força de D 3.02), e (2) podemos substituir '$a \frown b$' por 'c' (por força da igualdade substitucional). Mas o resultado dessa substituição conduz precisamente às regras de 3.1 a 3.3. (POPPER, 1947, pg. 208) [4]

Em face disso, Kleene argumenta que as definições inferenciais não podem fornecer o significado das constantes lógicas uma vez que elas pressupõem a existência de operações lógicas na linguagem objeto com as propriedades semânticas pretendidas. Observe que o segundo passo usado no raciocínio acima, Popper assume que $A \wedge B$ pode substituir C caso sejam interdedutíveis. Kleene enfatiza que, ao proceder dessa forma, Popper está assumindo que a linguagem sob discussão possui uma conjunção. Entretanto, $A \wedge B$ deveria contar apenas como uma etiqueta ou uma mera abreviação para o predicado metalinguístico 'é conjunção de A e B'. Usar $A \wedge B$ desse modo é entrar em conflito com a afirmação de que não se está nem mesmo supondo que as linguagens sob consideração possuam um sinal para a conjunção.

Outro argumento que pretende salientar o importe existencial das definições inferenciais. [5] Considere a definição inferencial da operação 'o oposto de'(abreviada como op()) apresentada em (POPPER, 1946, pg. 284):

[4] *From this definition, we can obtain the three rules 3.1, 3.2, and 3.3 in the following way: if c $a \frown b$ are substitutionally equal, then: (1) $c/a\&c/b\&a, b/c$ (by force of D 3.02), and (2) we may substitute '$a \frown b$' for 'c' (by force of substitutional equality). But the result of this substitution leads precisely to the rules 3.1 to 3.3.*

[5] Argumento atribuído a Lejewski, C. *Popper's theory of formal or deductive inference*, 1974. cf. (SCHROEDER-HEISTER, 1984)

$$A \dashv\vdash op(B) \Leftrightarrow \forall C(B \vdash A \ \& \ A \vdash C) \tag{2.30}$$

De acordo com Popper, uma linguagem que possua a operação de 'oposto de' será trivial. Esse fato pode ser observado ao substituirmos A por $op(B)$. A seguinte árvore apresenta a demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{op(B) \dashv\vdash op(B) \leftrightarrow \forall C(B \vdash op(B)\&op(B) \vdash C \qquad op(B) \vdash op(B)}{\forall C(B \vdash op(B)\&op(B) \vdash C}}{B \vdash op(B)\&op(B) \vdash C_1}}{B \vdash op(B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dots}{B \vdash op(B)\&op(B) \vdash C_1}}{op(B) \vdash C_1}}{\dfrac{B \vdash C_1}{\forall C(B \vdash C)}}$$

Com a constante '*oposto de*' obtemos uma derivação que diz, basicamente, que toda sentença é consequência de qualquer outra, o que justifica a asserção de que a linguagem sob consideração é trivial. Nas palavras de Popper, isso não deve nos conduzir a um abandono de (2.30), mas sim a conclusão de que *'nenhuma linguagem consistente terá um sinal para "o oposto de b"'*. Lejewski então propõe uma constante chamada 'oposto* de', definida de modo semelhante a anterior, mas com uma mudança perspicaz.

$$A \dashv\vdash op * (B) \Leftrightarrow \forall C(B \vdash A \ \& \sim (B \vdash C)) \tag{2.31}$$

Se a definição de 'o oposto* de b' é adequada, então temos que a própria metalinguagem onde formulamos a definição se tornaria inconsistente. Note que o lado direito da condição que define 'o oposto* de b' exige que toda sentença não seja consequência de B. Ora, a teoria geral da derivação, proposta por Popper, assume de antemão que a noção de consequência é reflexiva, o que significa em particular que $B \vdash B$. Sendo assim, teríamos que $B \vdash B$ e $\sim (B \vdash B)$. Para Lejewski é errado considerar (2.31) como uma definição legítima sem primeiro asseguramo-nos de que para toda sentença de L, o 'oponente* de b' também é uma sentença de L, ou seja, para determinar a legitimidade de uma definição inferencial uma das condições a serem verificadas é a de que as sentenças em questão fazem parte da mesma linguagem na qual a alega definição é formulada. Assim, a definições inferenciais estariam apenas descrevendo um determinado comportamento de uma operação que já existe (ou pode vir a existir) na linguagem, ao invés de determinar o significado de uma etiqueta.

Continuamos com as objeções.

- *O conceito de dedutibilidade é insuficiente para fornecer o significado das constantes lógicas;*

McKinsey (1948, pg. 115) observa que é impreciso o modo como a noção de dedutibilidade ($\vdash$) é utilizada no *definiens* das definições inferenciais. Deveríamos compreendê-las como envolvendo inferências arbitrárias quaisquer que sejam ou apenas as inferências absolutamente válidas, i.e., aquelas que envolvem reflexividade e transitividade?

Tome a seguinte formulação alternativa da definição inferencial da disjunção.

$$A \dashv\vdash B_1 \smile B2 \Leftrightarrow \forall C_1 : A, C_1 \vdash C_2 \Leftrightarrow B_1, C_1 \vdash C_2 \;\&\; B_2, C_1 \vdash C_2 \tag{2.32}$$

Considere a interpretação onde A, B_1, B_2 são distintos, C_2 é A e C_1 é diferente de todos os outros. Nessa interpretação, temos que $A, C_1 \vdash C_2$ é satisfeita enquanto que $B_1, C_1 \vdash C_2$ e $B_2, C_1 \vdash C_2$ são falsas. Ora, se compreendermos '$\vdash$' acima no sentido de dedutibilidade absoluta temos que (2.32) forneceria a definição da disjunção exclusivamente no caso em que A é idêntica aos disjuntos B_1, B_2.

Por outro lado, se '$\vdash$' compreende as inferências ordinárias, então a definição proposta é circular, pois estaria se utilizando a relação de dedutibilidade que não foi definida independente das constantes lógicas.

- *A teoria envolve mais elementos do que simplesmente definições inferenciais*

Schroeder-Heister (1984) sintetiza essa objeção do seguinte modo. Popper pretendeu relacionar sua teoria e o sistema do *Principia Mathematica* desenvolvido por Russell e Whitehead. Em linhas gerais, sua pretenção era a de fornecer para qualquer fórmula demonstrável no sistema do *Principia Mathematica*, uma fórmula correspondente em seu sistema. Entretanto, no caso de inferências intuicionisticamente inválidas, mas classicamente válidas, a obtenção da fórmula deve envolver a negação clássica. Por exemplo, a fórmula conhecida como *lei de Peirce* que $((A \to B) \to A) \to A$ que é intuicionisticamente inválida, deveria envolver a negação. Entretanto, Kleene (1948, pg. 174) defende que se as definições fossem explícitas, não deveria fazer diferença com relação a qualquer outro conectivo, se a definição de negação está ou não ao dispor da teoria. Como aponta Schroeder-Heister (1984) o ponto chave aqui é de que as definições não poderiam ser criativas, no sentido de expressar noções lógicas que, a rigor, deveriam ser diferentes. Em particular, isso quer dizer que a definição de *negação* não deveria fornecer fórmulas deriváveis onde não há ocorrência desse mesmo conectivo. Nesse sentido, o sistema de Popper não caracteriza toda a lógica exclusivamente por meio das definições inferências. Para Kleene uma reconstrução em detalhes do sistema de Popper traria à tona o fato de que o aparato formal que ele pretende dar uma fundação, em última instância, aparece entre seus pressupostos.

Como os autores que apresentaremos adiante usam o cáculo de sequentes como ferramenta para propor a demarcação das constantes lógicas, apresentaremos de forma resumida esse formalismo.

2.3 Interlúdio: o Cálculo de Sequentes

Gentzen (1969) buscou em suas *'Investigações em Deduções Lógicas'* estabelecer um sistema formal que refletisse 'precisamente, tanto quanto possível, o raciocínio lógico envolvido em demonstrações matemáticas'(GENTZEN, 1969, pg. 74). Como resultado desse empreendimento, dois sistemas acabaram sendo propostos, a saber, o cálculo de *dedução natural* e o cálculo de *sequentes*, ambos para a lógica clássica de primeira ordem. É importante notar que a apresentação que oferecemos a baixo não segue à risca a apresentação fornecida por Gentzen.

As letras A, B, C, serão usadas como letras esquemáticas para fórmulas de uma linguagem objeto. Γ e Δ são letr as esquemáticas para conjuntos de fórmulas (possivelmente vazios) daquela linguagem. Se estamos trabalhando com conclusão única (*single conclusion*) os sequentes são expressões da forma $\Gamma \Rightarrow A$. Caso estejamos trabalhando com conclusão múltipla (*multiple conclusion*) um sequente é da forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Seguindo (HUMBERSTONE, 2011, pg. 103), podemos afirmar que do ponto de vista intuitivo sequentes são análogos formais de um argumento. Assim, o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ expressa a ideia de que há uma dedução da conclusão A a partir das premissas em Γ. À esquerda de $(\Rightarrow)$ temos o que é chamado de antecedente do sequente e à direita o que chamamos de seu sucedente.

As regras do cálculo de sequentes são divididas em dois grupos, chamadas por Gentzen de *regras estruturais* e *regras operacionais*. As regras estruturais são aquelas que 'não referem aos simbolos lógicos, mas meramente a estrutura dos sequentes'(GENTZEN, 1969, pg. 82). Dentre as principais temos

$$\frac{}{A \Rightarrow \; A}\ (Ref)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (Thin_e) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (Thin_d)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$

Na apresentação de Gentzen (Ref) é chamada de *sequente inicial* e é assumida como axioma. Além dessas regras, ainda há as regras de *contração* e *permutação*.

As regras operacionais, por seu lado, são aquelas que lidam com as constates lógicas. Como os operadores são introduzidos ou como antecedentes ou sucedentes de um sequente usarei a seguinte convenção. $(\# \Rightarrow)$ significa que o a constante # foi introduzida como antecedente do sequente, e ($\Rightarrow \#$) significará que a constante # foi introduzida como sucedente do sequente. Para as constantes da lógica de primeira ordem as seguintes regras são fornecidas.

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,(\wedge \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\,(\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}\,(\vee \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(\Rightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}\,(\to \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\,(\Rightarrow \to)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta}\,(\sim \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim A}\,(\Rightarrow \sim)$$

$$\frac{\Gamma, A(a/x) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta, \sim A}\,(\exists \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t/x), \exists x A(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)}\,(\Rightarrow \exists)$$

$$\frac{\Gamma, A(t/x), \forall x A(x) \Rightarrow \Delta(x)}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta}\,(\forall \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)}\,(\Rightarrow \forall)$$

Nas regras para ($\exists$) e ($\forall$), t é um termo arbitrário e a é uma variável que não deve ocorrer em Γ e Δ. Agora que possuímos as ferramentas necessárias para o compreensão das abordagens que serão tratadas, seguiremos a exposição.

2.4 Došen e Constantes lógicas como sinais de pontuação

Kosta Došen apresenta em (DOŠEN, 1989) uma proposta de demarcação das constantes lógicas que utiliza como dispositivo formal o cáculo de sequentes. Primeiro, Došen defende que sua visão não deve ser confundida com aquela que toma as regras como dando o significado das constantes lógicas. Sua principal tese é a de que as constantes lógicas funcionam (metaforicamente falando) como *sinais de pontuação* para algumas características estruturais das deduções.

Em primeiro lugar, Došen apresenta uma série de pressupostos que sustentam sua principal tese em torno da logicidade das constantes. Em seguida, uma teoria filosófica sobre o conceito de 'análise' é esboçada, uma vez que essa noção é um ingrediente da tese. Os pressupostos assumidos por Došen são:

[A] *Lógica é a ciência das deduções formais;*

[B] *As deduções formais mais básicas são as regras estruturais (do cálculo de sequentes)*

[**C**] *Qualquer constante da linguagem objeto cuja a descrição dependa de deduções formais não estruturais, pode ser 'em última instância' analisada em termos estruturais;*

Došen reconhece que [**A**] é uma tese controversa que muito embora possua certa tradição, ainda assim dificilmente parece abarcar tópicos estudados em teoria dos modelos, teoria da recursão, teoria dos conjuntos, etc., que comumente vão sob a etiqueta de assuntos da 'lógica'. Lógica aqui é apresentada no mesmo espírito da tradição da teoria das demonstrações iniciada por Gentzen.

[**B**] especifica que as deduções formais da lógica são as regras estruturais, no mesmo sentido de Gentzen, deduções descritas independente das constantes da *linguagem objeto*. Došen (1989, pg. 366) ressalta que as regras estruturais formam as deduções mais básicas e que podem ser legitimamente consideradas formais por serem estabelecidas independente da linguagem objeto. E, em sua abordagem, uma figura uniforme do que seja a forma lógica é o que o pressuposto [**C**] tenta estabelecer. A ideia de forma lógica é primariamente exibida por deduções estruturais; e quando as constantes lógicas são adicionadas elas servem, como sinais de pontuação (*punctuation marks*) para algumas características estruturais das deduções.

Em apoio a [**C**] são apresentadas as regras em dupla barra para as constantes lógica da lógica de primeira ordem. Tais regras podem ser vistas como a abreviação de duas regras, uma de cima para baixo e outra no sentido contrário. Došen considera primeiramente a função de pontuação da implicação. A seguinte regra é fornecida.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}\,(\rightarrow)$$

Došen (1989, pg. 366) afirma que quando tratamos uma sentença do tipo $A \rightarrow B$ podemos entendê-la como dizendo que as fórmulas componentes estão conectadas como premissa e conclusão na linguagem objeto. Assim, a implicação apenas internaliza a noção de dedução à linguagem objeto. Nessa interpretação, considerando a regra de cima para baixo, assumimos o *teorema da dedução*. No sentido oposto temos o comprometimento com a regra de *modus ponens*. Como o autor nota, a regra $(\rightarrow)$ pode caracterizar a implicação em outras lógicas além da lógica clássica. Um estudo detalhado dessa aplicação é proposta por Došen em (DOŠEN, 1985). Em linhas gerais a proposta ali apresentada é verificar o que acontece quando as regras que caracterizam unicamente as constantes lógicas fazem parte de um sistema onde diferentes regras estruturais são assumidas. Caso não nos fosse permitido o enfraquecimento a direita ($Thin_d$ em 2.3), obteríamos a implicação intuicionista. Se essa proibição fosse aplicada ao lado esquerdo ($Thin_e$ em 2.3) dos sequentes o resultado seria uma lógica relevante (DOŠEN, 1989, pg. 367).

Outras regras consideradas são as seguintes.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}\ (\forall)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\ (\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}\ (\vee) \qquad \frac{\Rightarrow \Delta}{\top \Rightarrow \Delta}\ (\top) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \bot}\ (\bot) \qquad \frac{S\binom{x}{a}\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, x = a \Rightarrow \Delta}\ (=)$$

Assim como na apresentação em 2.3, as regras para os quantificadores obedece a condição de que a variável x ocorra livre em Γ ou Δ. Além disso, é assumida a regra de substituição, a saber,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{S\binom{x}{a}\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

onde o sequente $S\binom{x}{a}\Gamma \Rightarrow \Delta$ é obtido de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ por substituir as ocorrências livres de x por a. O caráter de pontuação dos quantificadores é explicado do seguinte modo. Uma vez que assumimos a regra de substituição, ela nos permitiria tomar o x que pode ocorrer livre em A como simbolizando a expressão 'qualquer (*any*)'. Došen então afirma que as regras ($\forall$) e ($\exists$) expressam algo com relação à expressão 'qualquer' quando ela ocorrem em deduções. Caso 'qualquer' apareça na conclusão (sucedente) e em nenhum outro lugar, então ela torna-se 'todo', e se se encontra na premissa (antecedente) e em nenhum outro lugar a expressão 'qualquer' se torna 'algum'.

> Então, a forma lógica de $\forall x A x$ e $\exists x A x$ espelha uma característica estrutural das deduções, viz. a presença de uma variável em uma conclusão A ou em uma premissa A que não ocorre livre em qualquer outro lugar na dedução.(DOŠEN, 1989, pg. 367) [6]

Com relação as outras constantes lógicas Došen oferece alguns breves comentários. Com relação à ($\wedge$) e ($\vee$), Došen comenta que o papel dessas contantes é a economia, considerando a direção de cima para baixo, elas reduzem a uma duas deduções que diferem apenas em um lugar, na conclusão, no caso de ($\wedge$), ou na premissa ($\vee$). O $\top$ é um substituto para a coleção vazia de premissas, enquanto que $\bot$ é o substituto para a coleção vazia de conclusões.(DOŠEN, 1989, pg. 367). Para o caso que mais nos interessa aqui, Došen afirma.

> Identidade serve para indicar possibilidades de substituição em uma dedução: o que é válido para a também é válido para qualquer coisa que é assumida ser idêntica a a.(DOŠEN, 1989, pg. 368) [7]

[6] *So the logical form of $\forall x A x$ and $\exists x A x$ mirrors a structural feature of deductions, viz. the presence of a variable in a conclusion A, or in a premise A, a variable which doesn't occur free anywhere else in the deduction.*

[7] *Identity serves to indicate substitu- tion possibilities in a deduction: what holds for a also holds for whatever is assumed to be identical with a.*

Nesses termos, a regra proposta por Došen envolve a tese de indiscernibilidade dos idênticos tal como a apresentamos no primeiro capítulo. Došen sustenta que os pressupostos [**A**], [**B**] e [**C**] conjuntamente produzem a seguinte tese sobre as constantes lógicas.

> [**I**] Uma constante é lógica se, e somente se, ela podem 'em última instância' (*ultimately*) ser analisada em termos estruturais. (DOŠEN, 1989, pg. 368)

A grande questão aqui é entender o significa dizer que uma constante pode ser analisada em última instância em termos estruturais. A resposta de Došen é a de que uma expressão é analisada 'em última instância' se, e somente se, ela é analisada ou pode ser explicitamente definida em termos de expressões analisadas. Mas então, o problema é tentar o que significa analisar uma expressão e, em particular, o que é analisar uma constante lógica. Dšen então propõe um esboço de uma teoria sobre análise. O primeiro passo segundo ele, deveria ser o de separar uma análise de uma definição. A seguir apresentamos apenas o que diz respeito a análise e como a defesa de constantes lógicas enquanto sinais de pontuação se encaixa nessa abordagem.

Requisitos para análise

Segundo (DOŠEN, 1989, pg. 369) para analisar uma expressão # de uma linguagem L deveríamos primeiramente especificar uma linguagem M onde o *analisans* de # será formulado. Então, três condições deverão ser satisfeitas.

- (C1) Uma análise consiste em estabelecer que uma sentença **A** em M mais #, na qual # ocorre no máximo uma vez, é equivalente a uma sentença **B** em M
- (C2) Da equivalência em (C1), e da compreensão de M e L menos #, podemos inferir toda sentença de L que é analiticamente verdadeira em L e nenhuma sentença que não é analiticamente verdadeira em L.
- (C3) Expressões $\#_1$ e $\#_2$ podem receber a mesma análise se, e somente se, $\#_1$ e $\#_2$ têm o mesmo significado.

(C1) estabelece a forma de análise, enquanto que (C2) exige que essa análise deva ser correta e completa. (C3) exige que a análise caracterize unicamente as expressões. A expressão 'analiticamente verdadeira em L' em (C2) é entendida como 'verdadeira em virtude das expressões em L'. À luz dessa abordagem, o que significaria analisar as constantes lógicas? A resposta de Došen toma como exemplo o caso da implicação.

Dada a análise da implicação fornecida por ($\rightarrow$), temos que L é a linguagem ou da lógica proposicional ou da lógica de primeira ordem e M é a linguagem dos sequentes estruturais. A sentença **A** é o sequente inferior de $(\rightarrow)$, a saber, $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B$ enquanto que a sentença **B** é o sequente superior, $\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B$. Segundo (DOŠEN, 1989, pg. 373), como as regras de dupla barra abreviam uma equivalência, então a condição (C1) é atendida. Ainda, como em (DOŠEN, 1985) o autor propõe que a regra $(\rightarrow)$ caracteriza a implicação unicamente em diferentes sistemas e que o resultado são lógicas completas e corretas, então as condições (C2) e (C3) parecem adequadamente atendidas.

Com a identidade a única diferença é que a linguagem a qual a constante pertence é a lógicas de primeira ordem. A sentença **A** é o sequente inferior de $(=)$, a saber, $\Gamma, x = a \Rightarrow \Delta$. Já a sentença **B** é o sequente superior, $S\binom{x}{a}\Gamma \Rightarrow \Delta$. Considerando que a identidade, podemos assim concluir que a identidade também é uma constante lógica. Em resumo, Došen abre mão de usar as regras como dando o sentido para considerá-las apenas como fornecendo uma análise das constantes lógicas.

Através do Espelho

3 Identidade Revisitada

Neste capítulo pretendo apresentar um esboço de resposta ao problema da logicidade da identidade, tratado de forma detalhada no primeiro capítulo desta dissertação. O que será apresentado adiante não se trata de uma tese original, mas apenas a articulação de algumas ideias que encontramos na literatura em torno da identidade, como por exemplo, as que expusemos no segundo capítulo. Desse modo, o que será diferente aqui é o modo e o contexto em que essas ideias serão apresentadas, em particular, algumas das observações encontradas em Humberstone e Townsend (1994).

Relembramos que, em grande parte, os argumentos que pretensamente podem ser usados contra a logicidade da identidade apontavam a possibilidade de sua dispensabilidade. Quine (1986) propôs que a identidade é tão próxima da lógica que a partir dos outros conectivos poderíamos obter um substituto que cumpriria o seu papel dentro de um sistema formal. Hintikka mostrou que é possível construir uma linguagem livre da identidade e que possui o mesmo poder expressivo da lógica de primeira ordem onde '=' conta como uma constante lógica. Wehmeier, fazendo eco a um clamor *tractatiano*, pretendeu ir além ao argumentar que a própria noção de uma relação binária que todo objeto tem consigo mesmo e com nada mais sequer faz sentido caso estejamos em acordo sobre os princípios que determinam a aridade de uma relação. Entretanto, o que esses argumentos de dispensabilidade realmente mostram sobre a logicidade da expressão que estamos discutindo? Da forma como foram expostos, é possível argumentar que essas abordagens não afetam em nada o caráter lógico da identidade, mas para isso devemos abandonar um de seus pressupostos, a saber, o caráter representacional que notamos em (1.3)

3.1 Equivalência, Eliminação e Logicidade

Consideramos, primeiramente, o impacto da proposta de Hintikka (1956). Certamente é de grande interesse uma linguagem livre da identidade mas que ainda assim preserva o poder expressivo da lógica de primeira ordem com a identidade. Então poderíamos objetar. Se podemos expressar as mesmas coisas sem o uso da identidade, por quê deveríamos contá-la como uma constante lógica? Creio que há uma resposta bastante simples, que apresento abaixo.

Considere o caso da barra de Scheffer para a lógica proposicional clássica. Sabemos que '|' é funcionalmente completo, o que em linhas gerais significa que todas as funções (booleanas) de verdade podem ser expressas usando esse único conectivo. Seria esse fato um motivo para argumentar contra a logicidade de todos os outros conectivos que costumeiramente chamamos de lógicos? Naturalmente, essa parece uma proposta estranha que dificilmente alguém defenderia. Ainda que do ponto de vista semântico tenhamos essa equivalência, do ponto de vista inferencial esses conectivos desempenham papéis muito diferentes. Isso pode ser notado com a seguinte regra de inferência fornecida por Hacking (1979).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma, A|B \Rightarrow \Delta}\ (| \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A|B}\ (\Rightarrow |)$$

Certamente não é imediata a constatação de que, por exemplo, $A \wedge B$ é na verdade $(A|B)|(A|B)$. Com a licença de usar frouxamente a terminologia fregeana, o pesamento expresso por $A \wedge B$ é completamente diferente de $(A|B)|(A|B)$. Temos ainda a possibilidade, por exemplo, de definir uma constante lógica em termos de outras como, por exemplo, definir a quantificação universal em termos do quantificador existencial e da negação. Mas, naturalmente, isso seria de pouca força para depor contra a logicidade desses termos. Usando um dito de Humberstone e Townsend (1994, pg. 253), 'equivalência lógica não significa equivalência conceitual'. É claro, ainda se poderia argumentar que o próprio modo como entendemos a barra de Scheffer, i.e., 'não ambos', revela que outros conectivos lógicos são mais fundamentais em sua definição, a saber, a negação e a conjunção. Todavia, dizer o que é mais fundamental requereria um pouco mais de argumentação filosófica. Ao invés de seguir essa linha, apenas me limito a sugerir que podemos considerar ambos os lados como mais fundamentais. Em outras palavras, uma linguagem que contenha apenas a barra de Scheffer pode considerá-la como mais fundamental dependendo dos propósitos para os quais a linguagem foi criada, o mesmo ocorrendo para o caso dos conectivos de conjunção, disjunção, etc. Creio que o mesmo pode se aplicar às proposta de Hintikka (1956). Elas nada mais são que a adoção de perspectivas metodológicas que nos levam a se comprometer com determinados tratamentos da linguagem tendo em vista os objetivos que temos em mente. Basta lembrar que o próprio Hintikka (1956) encarou sua abordagem desse modo. Ou seja, do fato de que temos uma linguagem livre da identidade e que ela possui o mesmo poder expressivo que uma linguagem com a identidade isso por si só não revela nada sobre a identidade ser lógica ou não.

O que acontece, no entanto, se argumentos de cunho metafísico são usados contra a logicidade da identidade? Creio que os contra-argumentos à proposta de Quine são bastante reveladores a esse respeito, e para isso nos dirigimos à próxima seção.

3.2 Sentido é Referência?

Lembramos que Béziau (2013) sugere que Quine não está falando sobre a identidade, mas sobre a assim chamada identidade de Leibniz, uma relação de equivalência que é compatível com as operações da linguagem. Wiggins (2001) fala da falta de univocidade da identidade quando entendida como a abreviação de uma sentença similar à **(3)**. Ou ainda, que a identidade pode ser uma das relações necessárias para determinar as condições de verdade das sentenças da linguagem. Ora, em todos esses casos está em jogo tacitamente a suposição de que '=' deveria ser a contraparte formal da identidade tal qual a concebemos no nível intuitivo, a relação binária que uma coisa tem consigo mesmo e nada mais. Chamamos essa abordagem de representacionalista, por que entende (=) como referindo a propriedade binária que tratamos. Quando Wehmeier propõe o princípio wittgenstainiano de aridade (PWA) o mesmo raciocínio parece estar em jogo. Wehmeier não endossa apenas a abordagem de Hintikka, mas pensa que ela ainda não é suficiente para a tese da não existência de uma relação que objetos tem consigo mesmo e nada mais. Ou seja, a eliminabilidade da identidade seria apenas um passo em direção a um modo de vida sem a identidade. Parece natural então que a compreensão de (=) se dê por meio da relação binária, ou o conjunto de pares <x, x> da diagonal de um conjunto. Entretanto, deveríamos mesmo supor que as coisas são assim? Creio que essa compreensão não é a única a nosso dispor. Humberstone e Townsend (1994) propõem que façamos a distinção entre o *conceito* de identidade e a relação de identidade. E por conceito identidade os autores concebem algo como

(3a) a é (numericamente) idêntico a b.

Como os autores notam, a fala em termos do conceito de identidade deveria ser entendia como o *sentido* fregeano, como o modo de apresentação de um predicado. Se essa distinção realmente faz sentido, que tipo de ganhos são adquiridos?

Primeiro, Humberstone e Townsend (1994, pg. 260) defendem que podemos entender que no exercício do conceito de identidade somos constrangidos pelas regras de inferência que envolvem (=), 'ninguém que compreenda o sentido de = poderia falhar em ver a correção de afirmações da forma $t = t$, ou duvidar da propriedade de inferir, por exemplo, Fb a partir de Fa juntamente com $a = b$'. Em segundo lugar,

> [...]o pensamento envolvendo a identidade requer grande sofisticação no seguinte respeito: que o raciocinador deveria ser capaz de sucessivamente conceber os indivíduos enquanto deixa aberta a questão da distinção um dos outros, e então fechar essa questão negativamente. Esta possibilidade está implícita na regra de =-eliminação, que permite diferente termos serem usados anteriormente a descoberta que eles co-denotam, descoberta à luz da qual essa diferença não importará. (HUMBERSTONE; TOWNSEND, 1994, pg. 260) [1]

[1] *[...] the identity-involving thought calling for greater sophistication in the following respect: that the*

Os autores ilustram o exercício do conceito da identidade apelando para a *teoria da representação do discurso*, que é um arcabouço teórico criado basicamente para dar conta de questões da semântica da linguagem natural. A ilustração proposta é a seguinte. Poderíamos pensar o mapa conceitual de raciocinador como um diagrama. Os objetos seriam pontos nesse diagrama, e as informações predicativas seriam fixadas a cada ponto. Entretanto, as predicações relacionais seriam pensadas como setas conectando dois pontos. Entretanto, se a identidade fosse apenas uma relação binária, a assimilação dela deveria ser a de traçar setas conectando pontos. Mas nesse caso não é o que ocorre.

> [...] ao invés de adicionar qualquer coisa, um dos pontos deveria ser destruído, e toda a informação associada a ele transferida para o ponto sobrevivente. (HUMBERSTONE; TOWNSEND, 1994, pg. 261) [2]

Ao menos parece clara, aqui, a relação entre essa imagem do mapa conceitual de um raciocinador com relação à identidade e a regra de eliminação para a identidade em dedução natural. Lembramos que essa regra incorpora o princípio de indiscernibilidade dos idênticos, de que se x e y são idênticos, então tudo o que é verdadeiro de x é verdadeiro de y. Lembramos também que na proposta de Došen (1989) a regra que caracteriza a identidade envolve a noção de substituição. Então, ainda que não seja uma resposta definitiva, esse parece o caminho a ser seguido se buscamos tratar da logicidade da identidade.

3.3 Múltiplas identidades

Em meio a discussão do primeiro capítulo falamos de identidade numérica, identidade de Leibniz, identidade de Quine, critérios de identidade. Enfatizamos aqui que a diferença entre a identidade de Leibniz e a identidade de Quine é apenas uma questão de método. Ou mais precisamente, é fato que axiomas para a identidade apenas garantem uma congruência, Quine apenas nos mostrou como construir essa congruência caso não tivéssemos o operador (=) na linguagem. Ainda que queiramos defender a logicidade da identidade usando as regras de inferência temos que lidar com esse fenômeno. Como (QUINE, 1986) bem observou, ainda que ocorra o fato de que a abordagem falhe em espelhar a identidade numérica, *do ponto de vista da linguagem* isso é imperceptível. Note que quando falamos do exercício do conceito de identidade, a disposição de informação era fundamental para retificar a suposta diferença entre os objetos. Penso que o mesmo vale no caso oposto, a indistinguibilidade, dentro de um sistema formal, talvez seja a característica mais palpável que temos de dar conta da identidade. Talvez, se a identidade deve ser *logicamente* tratável, em certa medida, ela dependerá da informação que temos em mãos.

thinker should be capable of successively envisaging individuals while leaving open the question of their distinctness from one another, and then closing this question, negatively. Such a possibility is implicit in the rule of =-Elimi- nation, which allows for different terms to be used prior to the discovery that they 'co-denote', in the light of which discovery that difference comes not to matter.

[2] *[...]rather than adding anything, one of the dots should be rubbed out, and all predicative information associated with it transferred across to the surviving dot.*

Mais que responder, pretendemos lançar a seguinte questão. Não seria a compreensão por meio da indistinguibilidade a condição para o tratamento formal de identidade?

Do modo como penso, existem diferentes aspectos da identidade a se levar em consideração. Se pensarmos por um lado no estatuto ontológico da identidade, é possível que a discussão em torno desse tópico nos dirija a conclusão de que, na verdade, estamos falando de uma simples propriedade e não de uma relação que uma coisa tem consigo mesma e nada mais. Uma discussão sobre o que determina a aridade de relações poderia lançar luz sobre a questão metafísica. Agora, se nosso interesse repousa na logicidade da identidade, é o aspecto epistêmico, sobre o modo como estamos justificados a asserir uma afirmação de identidade, que se apresenta como mais interessante. Se as considerações da seção precedente estiverem corretas ao menos podemos argumentar que o conceito de identidade faz sentido. Entretanto, como poderíamos saltar disso para a conclusão de que ela é uma noção lógica? A resposta direta é aceitando um critério de logicidade similar aos apresentados no segundo capítulo da presente dissertação. Em outras palavras, o uso de regras de inferência para demarcar as constantes lógicas parece o mais adequado quando pretendmos captar a logicidade da identidade.

4 Conclusão

O objetivo desta dissertação era tratar o problema das constantes lógicas tendo como foco o caso da identidade. No primeiro capítulo exploramos argumentos em favor e contra a logicidade da identidade. Frege e Dummett (1973) propuseram que identidade era uma noção indispensável. Entretanto, contrastamos essa ideia com as perspectivas de Quine (1986), Hintikka (1956) e Wehmeier (2012) e ressaltamos que ela não parecia de todo satisfatória. Entretanto, constatamos que os contra-argumentos à indispensabilidade da identidade eram de caráter representacionalista, no sentido de que a significatividade da identidade repousava no fato de denotar um objeto extralinguístico, uma relação binária.

No segundo capítulo buscamos uma saída para o caráter representacionalista da discussão sobre a identidade. Nas perspectivas de Popper (1946), e Došen (1989), a identidade é considerada constante lógica, e desempenha um papel lógico intimamente ligado a noção de substituição. A grande questão é a de como deveríamos motivar a escolha de algum desses tratamentos.

No último capítulo, notamos que alguns dos argumentos que poderiam depor contra a logicidade da identidade ou não têm força suficiente para fazê-lo ou estão tratando de um objeto sobre o qual não precisamos nos comprometer. Se do ponto de vista metafísico a identidade é uma propriedade dos indivíduos, ainda assim, precisamos de uma abordagem sobre seu comportamento nas inferências que esboçamos. Se seguirmos as observações de Humberstone e Townsend (1994), então a melhor compreensão que teremos sobre a identidade é entendê-la enquanto um conceito.

Na literatura sobre o Problema das Constantes Lógicas os critérios de logicidade são propostos de modo que deem conta, de uma vez por todas, de um conjunto de constantes, quase sempre aquelas que pertencem à Lógica Clássica de Primeira Ordem. Na presente dissertação o caminho trilhado diverge em espírito dessas abordagens tradicionais. Busquei analisar argumentos em favor da logicidade da identidade fora da discussão sobre logicidade em si mesma, buscando entender o que intuitivamente compreendemos com a identidade e buscando recursos formais que parecem se adequar à sua aparente logicidade. A próxima questão que se coloca é a de se essa abordagem funciona também para as outras constantes lógicas tradicionais. Em outras palavras, ao analisar o que esperamos do aspecto lógico da negação ($\sim$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$), os quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$), chegaríamos sempre em uma abordagem de caracterizações inferenciais? Em caso afirmativo, as perguntas sobre o que determina se uma regra é lógica ou não permanecem na agenda filosófica.

Referências

BELNAP, N. Tonk, plonk and plink. *Analysis*, Oxford University Press, v. 22, n. 6, p. 130–134, 1962. 29

BÉZIAU, J. Y. Quine on identity. *Principia*, v. 7, n. 1-2, p. 1–15, 2013. 40, 43, 77

BOLZANO, B. *Theory of Science*. [S.l.]: Basil Blackwell, Oxford (translation by R. George), 1972. 24

BUENO, O. Why identity is fundamental. *American Philosophical Quarterly*, v. 51, n. 4, p. 325–332, 2014. 33

DOŠEN, K. Sequent-systems for modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, Association for Symbolic Logic, v. 50, n. 1, p. 149–168, 1985. 69, 72

DOŠEN, K. Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Press, v. 30, n. 3, p. 362–381, 1989. 11, 13, 19, 57, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 81

DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Language*. First edition. [S.l.]: Harper & Row, 1973. 18, 32, 33, 34, 35, 81

FINE, K. Neutral relations. *Philosophical Review*, Duke University Press, v. 109, n. 1, p. 1–33, 2000. 49

GENTZEN, G. Investigations into logical deduction. In: SZABO, M. E. (Ed.). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. [S.l.: s.n.], 1969. 67

GOMEZ-TORRENTE, M. The problem of logical constants. *Bulletin of Symbolic Logic*, Jstor, v. 8, n. 1, p. 1–37, 2002. 26, 27, 56

HACKING, I. What is logic? *Journal of Philosophy*, Journal of Philosophy Inc, v. 76, n. 6, p. 285–319, 1979. 19, 76

HARMAN, G. Is modal logic logic? *Philosophia*, Springer Netherlands, v. 2, n. 1-2, p. 75–84, 1972. 27, 28, 29

HINTIKKA, K. J. J. Identity, variables, and impredicative definitions. *Journal of Symbolic Logic*, Association for Symbolic Logic, v. 21, n. 3, p. 225–245, 1956. 18, 36, 44, 45, 47, 51, 75, 76, 81

HODGES, W. Handbook of philosophical logic. In: ______. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. cap. Elementary Predicate Logic, p. 1–129. 40

HUMBERSTONE, L. *The Connectives*. [S.l.]: MIT Press, 2011. 67

HUMBERSTONE, L.; TOWNSEND, A. Co-instantiation and identity. *Philosophical Studies*, Springer, v. 74, n. 2, p. 243–272, 1994. 11, 13, 19, 75, 76, 77, 78, 81

KLEENE, S. C. Review: K. r. popper, functional logic without axioms or primitive rules of inference. *Journal of Symbolic Logic*, v. 13, n. 3, p. 173–174, 1948. 64, 66

LAPOINTE, S. *Bernard Bolzano's Theoretical Philosophy: An Introduction*. [S.l.]: Palgrave Macmillan, 2011. 24

MACFARLANE, J. Logical constants. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2015. [S.l.: s.n.], 2015. 26, 34, 56, 57

McGINN, C. *Logical Properties: Identity, Existence, Predication, Necessity, Truth*. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. 33

MCKEON, M. W. *The Concept of Logical Consequence: An Introduction to Philosophical Logic*. [S.l.]: Peter Lang Pub., 2010. 43

MCKINSEY, J. C. C. Review: K. r. popper, logic without assumptions. *Journal of Symbolic Logic*, v. 13, n. 2, p. 114–115, 1948. 66

PEREGRIN, J. *What is Inferentialism?* 2012. Disponível em: <http://jarda.peregrin.cz/mybibl/PDFTxt/580.pdf>. 19, 44

POPPER, K. R. Logic without assumptions. *Proceedings of the Aristotelian Society*, Wiley-Blackwell, v. 47, n. n/a, p. 251–292, 1946. 11, 13, 19, 57, 58, 59, 60, 64, 81

POPPER, K. R. New foundations for logic. *Mind*, Oxford University Press, v. 56, n. 223, p. 193–235, 1947. 57, 61, 64

QUINE, W. V. *Philosophy of Logic*. 2nd. ed. [S.l.]: Harvard University Press, 1986. 18, 36, 37, 38, 39, 75, 78, 81

SAGI, G. *Logical Consequence: Between Formal and Natural Language*. Tese (Doutorado) — Hebrew University, 2013. 25

SAINSBURY, M. *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*. [S.l.]: Wiley-Blackwell, 2000. 26, 27

SAVELLOS, E. E. On defining identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Press, v. 31, n. 3, p. 476–484, 1990. 33

SCHROEDER-HEISTER, P. Popper's theory of deductive inference and the concept of a logical constant. *History and Philosophy of Logic*, Taylor & Francis, v. 5, n. 1, p. 79–110, 1984. 63, 64, 66

SHAPIRO, S. *Varieties of logic*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2014. 30, 55

TARSKI, A. *A concepção semântica da verdade*. [S.l.]: UNESP, 2007. 25

WARMBROD, K. Logical constants. *Mind*, Oxford University Press, v. 108, n. 431, p. 503–538, 1999. 25

WEHMEIER, K. Wittgensteinian predicate logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Press, v. 45, n. 1, p. 1–11, 2004. 44

WEHMEIER, K. F. How to live without identity—and why. *Australasian Journal of Philosophy*, v. 90, n. 4, p. 761–777, 2012. 18, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 81

WIGGINS, D. *Sameness and Substance Renewed*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. 40, 41, 43, 77