Os Teoremas da Incompletude de Gödel

Uma Introdução Informal

Daniel Durante Pereira Alves

Os Teoremas de Gödel

- Qualquer formalização da aritmética de primeira ordem (de Peano - *AP*) através de qualquer versão da lógica clássica (CP_1) é, na hipótese de sua consistência, **incompleta**. Ou seja, possui sentenças verdadeiras que não são demonstráveis no sistema.

- Não é possível provar a consistência da aritmética por qualquer tipo de argumentação que possa ser representada no formalismo da aritmética.

O Paradoxo de Richard

- Imaginemos uma lista das propriedades matemáticas descritas em linguagem natural (português).
- Propriedades como *ser número primo* e *ser um quadrado perfeito* podem ser definidas respectivamente por:
  - *Divisível apenas por si próprio e por um.*
  - *Produto de algum inteiro por ele próprio.*
- Podemos **ordenar** estas definições pelo **número de letras de todas suas palavras**. Em caso de empate, a ordem alfabética desempata.

- Assim, associamos um único número inteiro a cada definição, representando o lugar dela na lista.

1	P_1
2	P_2
3	P_3
:	:

- Pode ocorrer de um certo número *n* possuir a propriedade P_n (*n*-ésima propriedade da lista).

- Por exemplo:

  - *Se a propriedade de ser primo for a 17ª, então o número 17 possui a propriedade a ele relacionada.*

  - *Se a propriedade de ser um quadrado perfeito for a 21ª, então o número 21 não possui a propriedade a ele relacionada.*

- Diremos que os números do 2º tipo são ***Richardianos*** e os do 1º tipo **não *são Richardianos***.

m **é** Richardiano	*m* **não possui** a propriedade P_m
m **não é** Richardiano	*m* **possui** a propriedade P_m

- Note que "ser *richardiano* é uma propriedade sobre números". Alguns a possuem e outros não.

- Portanto, ela deve estar em nossa lista, associada a um número ***n***.

:	:
n-1	P_{n-1}
n	P_n: ser richardiano
n+1	P_{n+1}
:	:

A Pergunta Capciosa: ***n é richardiano*?**

- Lembre que *n* é o número associado à propriedade de ser richardiano.

- ***n* é richardiano** $\Rightarrow_{\text{tab.}}$ *n* possui a propriedade a ele relacionada $\Rightarrow_{\text{def.}}$ ***n* não é richardiano**.

- ***n* não é richardiano** $\Rightarrow_{\text{tab.}}$ *n* não possui a propriedade a ele relacionada $\Rightarrow_{\text{def.}}$ ***n* é richardiano**.

Um Paradoxo não tão paradoxal!

- O paradoxo de Richard é, na verdade, um pseudo-paradoxo, pois é construído através de uma violação de suas próprias regras do jogo.

- A propriedade de ser Richardiano é uma propriedade da notação das definições, não dos próprios números, portanto não deveria estar na lista.

- Note que Richardiano em Francês é diferente de Richardiano em Inglês e estes são diferentes de Richardiano em Português.

- Não há como sabermos qual é a propriedade numérica que os números richardianos possuem.

- **Ser richardiano** não é, portanto, uma propriedade **aritmética**, mas **metaritmética** (propriedade de propriedades aritméticas) e, além disso, é dependente de uma notação (linguagem) específica.

Mapeamento: uma grande Idéia

- **Gödel** produziu uma **versão sofisticada do paradoxo de Richard**, sem seus defeitos, e independente de notação, onde a propriedade que faz o papel do *richardiano*, representa, de fato, uma propriedade aritmética.

- As duas idéias fundamentais de seu desenvolvimento são as idéias de **Mapeamento** e de **Auto-referência**.

- A ***auto-referência*** ele buscou nos paradoxos, como o de Richard. Já a utilização do **mapeamento** foi a grande expressão de sua genialidade.

- Mapeamento, por si só, é uma idéia comum em matemática. **Descartes**, por exemplo, produziu um **mapeamento entre a geometria e a álgebra**, transformando questões geométricas em questões algébricas através de sua a **geometria analítica**.

- Gödel simplesmente construiu um mapeamento entre:

seqüências de símbolos	$\Leftrightarrow$	números naturais
propriedades simbólicas	$\Leftrightarrow$	propriedades aritméticas

- Este mapeamento, que descrito assim soa até óbvio, possibilitou efetivação de um outro mapeamento, de natureza muito mais abstrata:

propriedades aritméticas (sobre os números)	$\Leftrightarrow$	propriedades metaritméticas (sobre as propriedades)

- Por exemplo:

  - ***ser primo*** é uma propriedade de números.

  - ***‘Existem infinitos números primos’*** é uma proposição a respeito de números (aritmética).

  - ***ser demonstrável*** *é uma propriedade de propriedades.*

  - ***“ ‘existem infinitos números primos’ é uma sentença demonstrável”*** é uma proposição a respeito de proposições aritméticas (metaritmética).

- Mas como Gödel conseguiu transformar um mapeamento símbolo–número em um mapeamento aritmética–metaritmética?
- Fácil. Foi por causa da **formalização da Aritmética** de Peano através do Cálculo de Predicados de 1ª Ordem.
- Os resultados de Gödel são relativos a sistemas formais e **sistemas formais são sistemas de manipulação simbólica**.
- A aritmética de peano formalizada no CP_1 é um sistema sintático de manipulação simbólica.
- As propriedades aritméticas são reduzidas a seqüências de símbolos e as propriedades sobre as propriedades aritméticas são propriedades de seqüências de símbolos.

- Por exemplo:

    - A propriedade aritmética ***'o número 16 é um quadrado perfeito'*** *é descrita pela seqüência de símbolos:* $\exists$***y(y.y=16)***

    - A propriedade metaritmética: **" '*<u>a existência de números que são quadrados perfeitos</u>*' é demonstrável na aritmética de peano"** é uma propriedade (relação) simbólica entre a seqüência de símbolos $\exists$**x**$\exists$**y(y.y=x)** e duas seqüências de seqüências de símbolos: os **axiomas e regras da AP** e uma seqüência ***p*** (a **prova formal** da propriedade).

- Foi devido à formalização da AP que Gödel transformou um mapeamento **símbolo–número** em um mapeamento **aritmética–metaritmética**.

‘Paradoxo’ auto-referencial aritmético

- Com o mapeamento **aritmética–metaritmética**, Gödel produziu uma espécie de **dupla-interpretação** para as sentenças da aritmética.

- Uma sentença expressando alguma **propriedade aritmética** (sobre os números naturais), via mapeamento de Gödel também **pode ser interpretada** como uma sentença expressando alguma **propriedade metaritmética** (sobre sentenças sobre números naturais).

- Dessa forma, tornou-se possível para Gödel construir uma **sentença auto-referente G**, que além de expressar uma propriedade sobre os números naturais, também **expressa uma propriedade sobre si própria**.
- Com a auto-referência, Gödel conseguiu reproduzir na aritmética um **paradoxo auto-referencial**, sendo tal reprodução o núcleo seus resultados.

Efetuando o mapeamento: Número de Gödel

Símbolos Constantes	Número de Gödel
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\exists$	5
$\forall$	6
$=$	7
0	8
s	9
(	10
)	11
,	12

- Aos símbolos variáveis associamos números primos (>12), quadrados e cubos de números primos (>12).

Símbolos Variáveis	Números de Gödel
variáveis numéricas $n_1, n_2, n_3, n_4,\ldots$	13, 17, 19, 23...
Variáveis sentenciais $q_1, q_2, q_3, q_4,\ldots$	$13^2, 17^2, 19^2, 23^2\ldots$
Variáveis predicativas $P_1, P_2, P_3, P_4,\ldots$	$13^3, 17^3, 19^3, 23^3\ldots$

- Às seqüências de símbolos (fórmulas bem formadas), associamos o produto de fatores primos:

$\exists x_1(x_1=sx_2)$							
$\exists$	x_1	(	x_1	=	S	x_2	)
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
5	13	10	13	7	9	17	11
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2^5	$\times 3^{13}$	$\times 5^{10}$	$\times 7^{13}$	$\times 11^7$	$\times 13^9$	$\times 17^{17}$	$\times 19^{11}$

- Às seqüências de seqüências de símbolos (conjuntos de fórmulas / provas) associamos o produto de fatores primos:

Prova	*ng* das sentenças	*ng* da prova
$\exists x_1(x_1 = sx_2)$	n	$2^n \times 3^m$
$\exists x_1(x_1 = s0)$	m	

- Dada uma fórmula ou seqüência de fórmulas é portanto imediato achar o número de Gödel a ela relacionado.

- Duas questões:
  - *Como saber que duas fórmulas ou provas diferentes não têm o mesmo número de Gödel?*
  - *Como obter a sentença ou prova a partir de um determinado número de Gödel?*
- Resposta:
  - <u>Teorema Fundamental da Aritmética</u>*: todo número composto (não primo) possui uma única decomposição em fatores primos.*

** Mudando de Nível: **
** Dos Símbolos à Metaritmética **

- Através de uma longa série de definições de funções recursivas, Gödel mostrou que:

- Todo o raciocínio simbólico envolvido na noção de demonstrabilidade formal pode ser descrito (via *ng*) em termos de propriedades aritméticas.

- O fato de Gödel ter usado exclusivamente funções recursivas, garante que seu raciocínio neste ponto foi construtivo e que, portanto, as propriedades matemáticas que obteve são, elas próprias, formalizáveis na AP.

- Gödel construiu a propriedade ***Dem*(*x*,*y*)** que expressa exatamente:
  - *a relação aritmética que encontramos entre o número de Gödel (**x**) de uma seqüência de fórmulas e o número de Gödel (**y**) da última fórmula desta seqüência.*
- Por exemplo, se $\boldsymbol{x} = 2^{\mathbf{n1}} \times 3^{\mathbf{n2}} \times 5^{\mathbf{n3}} \times 7^{\mathbf{n4}} \times 11^{\mathbf{n5}}$
- Então, para que o par **(*x*,*y*)** possua a propriedade ***Dem***
  - ***x*** *e* ***y*** *devem ser números de Gödel.*
  - *Cada* $\boldsymbol{n_i}$ *deve ser um número de Gödel.*
  - *E* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{n_5}$.

- Não é difícil perceber que, diferentemente de *ser richardiano*, ***Dem*** representa uma propriedade puramente numérica, cuja definição formal, exata, no entanto, não é nada trivial.

- Mas além de representar esta propriedade aritmética, através do mapeamento de Gödel ***Dem(x,y)*** representa também a **propriedade metaritmética**:

  - *'A seqüência de fórmulas com número de Gödel x é uma prova da fórmula com número de Gödel y'*

- Temos, portanto, a imersão da metaritmética no sistema formal sobre o qual ela versa.

- Daqui para a auto-referência é um passo.

Os Resultados

1. A Sentença auto-referente (G)

- Procedendo de forma similar ao que argumentamos sobre a propriedade ***Dem(x,y)***, Gödel produziu uma sentença da *AP*, que podemos abreviar da seguinte forma:

- **G:** $\forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ng}(\mathbf{G}))$

- Onde ***ng*(G)** é apenas uma abreviação para uma complexa construção de funções recursivas que representa "*o número de Gödel da sentença **G***".

- **Em termos aritméticos** a sentença **G** expressa que não existe nenhum número que se relacione com ***ng(G)*** sob a relação ***Dem***.

- **Em termos metaritméticos** a sentença **G** expressa que não existe demonstração para a própria sentença **G**, ou, em palavras mais livres, **G** 'afirma':

  - *Eu não sou uma sentença demonstrável*

2. G é verdadeira

- *<u>hipótese do absurdo</u>: **G** é falsa.*
- *Então existe **m** tal que **Dem(m,ng(G))** vale.*
- *Logo, via mapeamento, existe uma prova para **G**, cujo número de Gödel é **m**.*
- *Mas como os axiomas de AP são verdadeiros, e AP foi construída sobre CP_1, que é correto, então AP é correta, ou seja, só demonstra sentenças verdadeiras.*
- *Logo, **G** é verdadeira.*
- *O que contraria a hip. do absurdo, portanto, **G é de fato verdadeira**.*

3. G não é Demonstrável na AP

- *Na interpretação metaritmética, **G** afirma de si mesmo que não é demonstrável.*
- *como **G** é verdadeira, sua interpretação metaritmética também é.*
- *Portanto **G não é demonstrável**.*

4. A AP é Incompleta

- ***G*** *é uma sentença reconhecidamente* ***verdadeira*** *que, no entanto,* ***não é demonstrável*** *na aritmética formalizada.*

- *Logo, existem verdades aritméticas que não são teoremas da AP.*

- *Portanto a* ***formalização da aritmética de 1a ordem é incompleta****.*

5. A AP é Essencialmente Incompleta

- *Mas e se nós **enriquecêssemos os axiomas** da AP de modo que **G se tornasse demonstrável**?*
- *Isso de fato poderia ser feito.*
- *Mas então poderíamos **aplicar novamente o método de Gödel neste novo sistema** e obter outra sentença G' verdadeira e não demonstrável.*
- *Não importa quantas vezes tentemos completar o sistema, **sempre é possível reaplicar o método de Gödel** e encontrar uma sentença auto-referente verdadeira e não demonstrável.*
- *Portanto a **aritmética é essencialmente incompleta**. Ou seja, não se trata de dizer que foi mal axiomatizada.*

6. Não existe prova aritmetizável de Consistência da AP

- Gödel construiu a seguinte sentença:

- **A:** $\exists \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

- **Em termos aritméticos** a sentença **A** afirma que *'existe um número* ***y*** *que não está na relação* ***Dem(x,y)*** *com nenhum número* ***x****.'*

- **Em termos metaritméticos** a sentença **A** afirma que *'existe uma fórmula da aritmética para a qual nenhuma seqüência de fórmulas constitui uma prova'*.

- Como a *AP* está formalizada em CP_1, onde:
    - *Contradição (Inconsistência)* $\Rightarrow$ *Trivialidade.*
- Então:
    - *Não Trivialidade* $\Rightarrow$ *Não Contradição (Consistência)*
- Portanto, a sentença **A**, ao afirmar a não-trivialidade da Aritmética, afirma a sua consistência.
- Ou seja, em **termos metaritméticos** podemos interpretar **A** como:
    - **A:** *"A aritmética é consistente".*

- Mas note que quando interpretarmos a sentença **G** como
    - **G:** *"Eu não sou demonstrável".*
- Estamos também a interpretando como:
    - **G:** *"A aritmética é incompleta"*
- Pois, em ambos os casos, sua verdade significa a existência de sentenças verdadeiras e não demonstráveis na *AP*.

- Dessa forma, a sentença **A→G** $(\exists y \forall x \neg Dem(x,y)) \rightarrow (\forall x \neg Dem(x, ng(G)))$ pode ser interpretada como:
    - **A→G:** *"Se a aritmética formalizada for consistente, então ela é incompleta"*
- Gödel mostrou que **A→G** é formalmente demonstrável na *AP*
- Isso garante que **A** não é demonstrável na *AP*, pois caso fosse, como **A→G** é demonstrável, por *Modus Ponens*, **G** também seria. Mas já sabemos que **G** não é demonstrável. Logo:
    - ***A*** *não é demonstrável.*

Mas o que significa isso?

- **A**, como dissemos, é interpretada, via mapeamento, como: "*a aritmética formalizada é consistente*".
- Se, contudo, a consistência da aritmética pudesse ser estabelecida por argumentação capaz de ser formalizada na *AP*, então **A** seria demonstrável.

- Logo, provar que **A** não é demonstrável é provar que:

    - *Se a aritmética é consistente, sua consistência não pode ser estabelecida por qualquer raciocínio metamatemático que possa ser representado dentro do formalismo da aritmética.*

- Bibliografia:

BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J. *Language, proof and logic*. New York: CSLI publications, 2000.

GÖDEL, K. “On formally undecidable propositions of principia mathematica and realted systems I”. In: SHANKER, S. G. (ed) *Gödel’s theorem in focus*. Sydney: Croom Helm, 1988.

NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. 2.ed. São Paulo: Ed. Perspectiva, 2001.

SHANKER, S. G. (ed) *Gödel’s theorem in focus*. Sydney: Croom Helm, 1988.